22/7 টো পাইতকৈ কিমান ডাঙৰ ?

ড° নয়নদীপ ডেকা বৰুৱা

যিকোনো বৃত্তৰ পৰিধি আৰু তাৰ ব্যাসৰ অনুপাতটো সদায় একে হয়, মানে ই এটা ধ্ৰুৱক (constant)। অৰ্থাৎ, বৃত্তটো সৰুৱেই হওক বা ডাঙৰেই হওক এই অনুপাতটোৰ কোনো হীন-ডেঢ়ি নহয়। গণিতৰ এই প্ৰসিদ্ধ ধ্ৰুৱকটোক গ্ৰীক আখৰ “পাই” ৰে বুজোৱা হয়। পাইৰ মান দশমিকৰ পিছত যিমান পাৰি সিমান স্থানলৈ উলিওৱাৰ প্ৰয়াস আজিৰ পৰা প্ৰায় চাৰিহাজাৰ বছৰ আগৰপৰাই চলি আহিছে। মূলতঃ কিন্তু গণিতজ্ঞ আৰ্কিমিডিচ, গ্ৰেগৰী-লায়েবনীৎজ, গাউছ-ব্ৰেণ্ট-চালামিন, ৰামানুজন আৰু বেইলী-বৰৱেইন-প্লাউফে দি যোৱা মূল পদ্ধতিকেইটাৰ আধাৰতেই এই গণনাসমূহ চলি আহিছে। শেহতীয়াকৈ যোৱা 2019 চনৰ 14 মাৰ্চত (পাই দিৱসৰ দিনাই) Googleৰ কৰ্মচাৰী Emma Haruka Iwao ই পাইৰ মান 31,415,926,535,897 (একত্ৰিশ ট্ৰিলিয়ন চাৰিশ পোন্ধৰ বিলিয়ন ন শ চাব্বিছ মিলিয়ন পাচশ পয়ত্ৰিশ হাজাৰ আঠ শ সাতানব্বৈ) দশমিক স্থানলৈ উলিয়াই নতুন ৰেকৰ্ড গঢ়িছিল। পিছে 2020 চনৰ 29 জানুৱাৰিত Timothy Mullican য়ে 50,000,000,000,000 (পঞ্চাছ ট্ৰিলিয়ন) দশমিক স্থানলৈ ‘পাই’ৰ মান উলিয়াই এই ৰেকৰ্ড ভংগ কৰে।

আমি সকলোৱে স্কুলৰ ষষ্ঠ শ্ৰেণীমানৰ পৰাই পাইৰ মোটামুটি মান, মানে আসন্ন মান (approximate value), সাত ভাগৰ বাইশ, 22/7, বুলি জানি আহিছোঁ। জুলাই মাহৰ 22 তাৰিখটো যিহেতু 22/7 হিচাবে লিখা হয়, সেয়েহে ইয়াক Pi Approximation Day বুলি কোৱা হয়। আনহাতে পশ্চিমীয়া দেশত মাৰ্চ মাহৰ 14 তাৰিখটোক যিহেতু 3/14 বুলি লিখা হয় আৰু দশমিকৰ পিছৰ দুটা স্থানলৈ পাইৰ মান হ’ল 3.14, সেয়েহে 1988 চনৰ পৰাই 14 March ক পাই দিৱস (Pi Day) হিচাবে পালন কৰি অহা হৈছে। আমি জনাত আমাৰ অসমত 2008 চনত প্ৰথমবাৰৰ বাবে পাই দিৱস পালন কৰা হয়। সেইবছৰ এই লেখকৰ তত্তাৱধানত তেজপুৰ বিশ্ববিদ্যালয়ত বিস্তৃত কাৰ্যসূচীৰে পাই দিৱস উদ্‌যাপন কৰা হয়। তাৰ পিছৰপৰা নিয়মীয়াকৈ তেজপুৰ বিশ্ববিদ্যালয়ৰ বাহিৰেও অসমৰ আন ঠাইতো এই দিৱসটি পালন কৰা হৈছে। উল্লেখনীয় যে এই বছৰৰ পৰা এই পাই দিৱসটোকে আন্তঃৰাষ্ট্ৰীয় গণিত সংস্থাৰ (International Mathematics Union) পৰামৰ্শমৰ্মে ইউনেস্কোই (UNESCO) আন্তঃৰাষ্ট্ৰীয় গণিত দিৱস (International Mathematics Day) হিচাবে ঘোষণা কৰিছে।

পাই আৰু 22/7 সম্বন্ধীয় সৰু আমোদজনক কথা এটা উপস্থাপন কৰিব খুজিছোঁ। বহুতে পাই মানে 22/7 বুলি ভুল ধাৰণা এটা লৈ থকা দেখা যায়। আচলতে 22/7 যে পাইৰ আসন্ন মানহে সেই কথাটো গাণিতিক সূত্ৰেৰে উপস্থাপন কৰিব বিচৰা হৈছে।

উল্লেখনীয় যে 22/7 টো এটা পৰিমেয় সংখ্যা (Rational number)। কাৰণ ইয়াক আমি দুটা অখণ্ড সংখ্যা 22

আৰু 7 ৰ ভগ্নাংশ হিচাবে প্ৰকাশ কৰিব পাৰিছোঁ। যিকোনো পৰিমেয় সংখ্যাক দশমিকত প্ৰকাশ কৰিলে সেই প্ৰকাশটো সদায় সমীম (finite) নাইবা অসীম পুনঃপৌনিক (infinite recurring) দশমিক হ'ব। উদাহৰণস্বৰূপে, 1/2 ক আমি 0.5 হিচাবে দশমিকত প্ৰকাশ কৰিব পাৰোঁ, যিটো হ'ল সসীম দশমিক। ঠিক তেনেকৈ 1/4 ক 0.25, 3/4 ক 0.75 ইত্যাদি। আনহাতে 1/3 ক দশমিকত প্ৰকাশ কৰিলে হ'ব 0.333333.. ...। আৰু এইটো হ'ল এটা অসীম প্ৰকাশ, কিন্তু ই পুনঃপৌনিক, কাৰণ দশমিকৰ পিছৰ 3 টো পুনঃ পুনঃ ওলায়েই থাকিব। ঠিক একেদৰে, 22/7 ক দশমিকত প্ৰকাশ কৰিলে আমি পাওঁ যে 22/7=3. 142857 142857 142857... ...। এই ক্ষেত্ৰত 142857, এই অংশটো পুনঃপৌনিক। সংখ্যা এটা যদি পৰিমেয় নহয়, মানে যদি অপৰিমেয় (Irrational number) হয়, তেন্তে তাৰ দশমিক প্ৰকাশটো কেতিয়াও পুনঃপৌনিক হ'ব নোৱাৰে। 1767 চনত গণিতজ্ঞ লেম্বাৰ্টে প্ৰমাণ কৰিলে যে পাই এটা অপৰিমেয় সংখ্যা। গতিকে ইয়াক দশমিক সংখ্যাত প্ৰকাশ কৰিলে ই এটা অসীম অপুনঃপৌনিক প্ৰকাশহে (infinite non-recurring decimal expansion) হ'ব। এই অপুনঃপৌনিক পাইৰ মানটো হ'ল 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 58209749 44592307816406286208998628034825342117 0679... ...।

ওপৰৰ পাইৰ মানটোৰ লগত 22/7= 3.142857 142857... ... তুলনা কৰি দেখা পোৱা যায় যে 22/7 টো আচলতে পাইৰ মানতকৈ ডাঙৰ (দশমিক চিহ্নৰ পিছৰ তৃতীয় স্থানত 22/7 ৰ আছে 2 আৰু পাইৰ আছে 1)। উল্লেখনীয় যে 22/7 সংখ্যাটোৱে প্ৰকৃততে দশমিকৰ পিছৰ মাথোন দুটা স্থানলৈহে পাইৰ শুদ্ধমান দিয়ে (3.14)।

এইয়ে 22/7 টো পাইতকৈ ডাঙৰ, কথাটো বেলেগ ধৰণে প্ৰমাণ কৰিব পাৰি নেকি ? লগতে 22/7 টো পাইতকৈনো কিমানকণ ডাঙৰ তাৰ কিবা গাণিতিক জোখ পাব পাৰিনে ? নিশ্চয় পাৰি। গণিতজ্ঞ ড'নাল্ড ডালজেলে {Donald P. Dalzell (1898-1988)} 1944 চনত তাকেই কৰি দেখুৱালে।

এটা বাস্তৱ সংখ্যা (পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় আটাইবোৰ মিলি হৈছে বাস্তৱ সংখ্যা) আন এটাতকৈ ডাঙৰ মানে আমি কি বুজোঁ। সংখ্যা 3 টো যে 1 তকৈ ডাঙৰ সেইটো কেনেকৈ বুজিছোঁ বাৰু ? 3 ৰ পৰা 1 বিয়োগ কৰি পালোঁ 2, যিটো ধনাত্মক; মানে শূন্যতকৈ বেছি, মানে পজিটিভ। গতিকে 3 হ'ল 1 তকৈ ডাঙৰ।

22/7 আৰু পাইৰ ক্ষেত্ৰতো ডালজেলে তাকেই কৰিছিল। তেওঁ দেখুৱালে যে

$$\frac{22}{7}-\pi=\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (1)$$

এই সূত্ৰটোৱে বুজাইছে যে 22/7 ৰ পৰা যদি পাই বিয়োগ কৰা যায় তেনেহ'লে সমান চিনৰ সোঁফালে থকা নিশ্চিত অনুকলটো (Definite Integral) পোৱা যাব। সোঁফালৰ নিশ্চিত অনুকলটোৰ অনুকল্যৰ (integrand) মান (অৰ্থাৎ, $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$ ৰ মান) যিহেতু 0 আৰু 1 ৰ মাজৰ যিকোনো x ৰ মানৰ বাবে ধনাত্মক, সেয়েহে অনুকলটোৰ মানো ধনাত্মকেই হ'ব। অৰ্থাৎ, সমান চিনৰ বাওঁফালৰ "22/7-π" খিনিও ধনাত্মক। সেয়েহে 22/7 হ'ল পাইতকৈ ডাঙৰ। আৰু সেই সোঁফালৰ অনুকলটোৰ মানটোৱেই হ'ল 22/7 সংখ্যাটো পাইতকৈ কিমানখিনি ডাঙৰ তাৰ গাণিতিক জোখ।

আমি দেখিলোঁ যে অপৰিমেয় π ৰ 22/7 হ'ল এটা পৰিমেয় আসন্নকৰণ (Rational approximation)। উল্লেখনীয়

যে যিকোনো অপৰিমেয় সংখ্যা এটাৰ সৰল অবিৰত ভগ্নাংশৰ (Simple Continued Fraction) অভিসৰণবোৰে (Convergents) আটাইতকৈ ভালকৈ পৰিমেয় আসন্নকৰণ (Best Rational Approximation) কৰে। অপৰিমেয় π ৰ সৰল অবিৰত ভগ্নাংশৰ ৰূপটো হ'ল—

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}}}}}$$

তলত পাইৰ এই সৰল অবিৰত ভগ্নাংশৰ পৰা পোৱা প্ৰথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুৰ্থ, পঞ্চম আৰু ষষ্ঠ অভিসৰণবোৰ দশমিক প্ৰসাৰণৰ সৈতে যথাক্ৰমে দিয়া হ'লঃ

$$\underbrace{3},$$

$$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = \underbrace{3.14}28571428571\ldots,$$

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = 3 + \frac{15}{106} = \frac{333}{106} = \underbrace{3.1415}094339622\ldots,$$

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113} = \underbrace{3.141592}9203539\ldots,$$

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{292}{293}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{293}{4687}} = 3 + \frac{4687}{33102} = \frac{103993}{33102} = \underbrace{3.1415926530}119\ldots,$$

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1}}}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\frac{293}{294}}}=3+\cfrac{1}{7+\frac{294}{4703}}=3+\frac{4703}{33215}=\frac{104348}{33215}=\underbrace{3.1415926539}214\ldots,$$

য'ত তল-বন্ধনীৰ ভিতৰত দিয়া অংককেইটালৈকে অভিসৰণকেইটাই পাইৰ শুদ্ধমান দিছে। সংখ্যাতত্বৰ তলৰ জনাজাত উপপাদ্যটোৰ দ্বাৰা এইটো প্ৰতীয়মান হয় যে অপৰিমেয় সংখ্যা এটাৰ সৰল অবিৰত ভগ্নাংশৰ অভিসৰণবোৰে আটাইতকৈ ভালকৈ সংখ্যাটো পৰিমেয় আসন্নকৰণ কৰে।

উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল x এটা অপৰিমেয় সংখ্যা আৰু P_k/Q_k হ'ল x ৰ সৰল অবিৰত ভগ্নাংশৰ k-তম অভিসৰণ। যদি অখণ্ড সংখ্যা p আৰু ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা q ৰ বাবে

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\left|x-\frac{P_k}{Q_k}\right|$$

সিদ্ধ হয়, তেন্তে $q>Q_k$ হ'ব।

উপৰিউক্ত উপপাদ্যৰপৰা এইটো সহজে অনুমেয় যে এটা পৰিমেয় সংখ্যা p/q ই 22/7 তকৈ ভালকৈ পাইৰ মান আসন্নকৰণ কৰিবলৈ হ'লে পৰিমেয় সংখ্যাটোৰ হৰটো, মানে q টো, 7 তকৈ ডাঙৰ হ'ব লাগিব। এটা পৰিমেয় সংখ্যা p/q ই পাইৰ সৰল অবিৰত ভগ্নাংশৰ আন এটা অভিসৰণ 355/113 তকৈ ভালকৈ পাইৰ মান আসন্নকৰণ কৰিবলৈ হ'লে q টো 113 তকৈ ডাঙৰ হ'বই লাগিব। প্ৰকৃততে সৰল অবিৰত ভগ্নাংশৰ তত্ব ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰিব পাৰি যে 22/7 এ আন যিকোনো লঘিষ্ঠ আকাৰৰ পৰিমেয় সংখ্যা p/q তকৈ ভালকৈ পাইৰ আসন্নমান দিয়ে যদিহে q টো 57 তকৈ সৰু হয়। এনেদৰে 355/113 টোও আন যিকোনো লঘিষ্ঠ আকাৰৰ পৰিমেয় সংখ্যা p/q তকৈ ভাল পাইৰ আসন্নমান যদিহে q টো 1000 তকৈ সৰু হয়।

পাই আৰু 22/7ৰ মাজৰ অন্তৰখিনি ডালজেলৰ অনুকলীয় সূত্ৰ (1) ৰ পৰা পালোঁ। প্ৰশ্ন হ'ল, একেধৰণৰ সূত্ৰ পাই আৰু ইয়াৰ সৰল অবিৰত ভগ্নাংশৰ বাকী অভিসৰণবোৰৰ অন্তৰখিনিৰ বাবেও উলিয়াব পাৰি নেকি? গণিতজ্ঞ ষ্টীফেন লুকাচে (Stepen K. Lucas) 2005 আৰু 2009 চনত দেখুৱালে যে

$$\int_0^1 \frac{x^5(1-x)^6(197+462x^2)}{530(1+x^2)}\,dx=\pi-\frac{333}{106},$$

$$\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8(25+816x^2)}{3164(1+x^2)}\,dx=\frac{355}{113}-\pi,$$

$$\int_0^1 \frac{x^{14}(1-x)^{12}(124360+77159x^2)}{755216(1+x^2)}\,dx=\pi-\frac{103993}{33102},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{12}(1-x)^{12}(1349-1060x^2)}{38544(1+x^2)}\,dx=\frac{104348}{33215}-\pi.$$

উপৰিউক্ত সূত্ৰসমূহত 333/106, 355/113, 103993/33102 আৰু 104348/33215 হ'ল πৰ সৰল অবিৰত ভগ্নাংশৰ যথাক্ৰমে তৃতীয়, চতুৰ্থ, পঞ্চম আৰু ষষ্ঠ অভিসৰণ। ডালজেল আৰু লুকাচে তেওঁলোকৰ সুন্দৰ সূত্ৰবোৰনো কেনেকৈ পাইছিল জানিবলৈ আগ্ৰহী পাঠকে নিম্ন লিখিত গৱেষণা পত্ৰকেইখন পঢ়িব পাৰে।

1. D.P. Dalzell (1944), On 22/7, Journal of the London Mathematical Society, 19 :133–134.
2. D.P. Dalzell (1971), On 22/7 and 355/113, Eureka; the Archimedeans' Journal, 34 : 10–13.
3. S.K. Lucas (2005), Integral proofs that 355/113>π, Gazette of the Australian Mathematical Society, 32 : 263–266.
4. S.K. Lucas (2009), Approximations to π derived from integrals with non-negative integrands, The American Mathematical Monthly, 116 : 166–172.

ড° নয়নদীপ ডেকা বৰুৱা বৰ্তমান তেজপুৰ বিশ্ববিদ্যালয়ৰ গণিত বিভাগৰ অধ্যাপক।

The history of the constant ratio of the circumference to the diameter of any circle is as old as man's desire to measure; where as the symbol for this ratio known today as π (pi) dates from the early 18th century. Before this the ratio had been awkwardly referred to in medieval Latin as 'the quantity which, when the diameter is multiplied by it, yields the circumference.'
It is widely believed that the great Swiss born mathematician Leonhard Euler (1707-1783) introduced the symbol π into common use. In fact it was first used in print in this modern sense in 1706 a year before Euler's birth by a self-taught mathematics teacher William Jones (1675-1749) in his second book Synopsis Palmariorum Matheseos, or A New Introduction to the mathematics based on his teaching notes.

[From 'The Man who Invented Pi' by Patricia Rothman in ***History today Vol. 59 issue 7, July 2009****]*