দুহেজাৰ বছৰৰ মূৰত উত্তৰ ওলোৱা তিনিটা প্ৰশ্ন

পংকজ জ্যোতি মহন্ত

অংকুৰণ ঃ

১৪ শতিকাৰ পৰা ১৭ শতিকা জুৰি ইউৰোপত যি নৱজাগৰণ সংঘটিত হৈছিল, তাৰে এজন মহান ৰূপান্তৰক আছিল ইটালীৰ চিত্ৰশিল্পী ৰাফাএল (Raphael)। তেওঁৰ শ্ৰেষ্ঠতম কৃতি হ'ল The School of Athens শীৰ্ষক দেৱাল-চিত্ৰখন। য'ত তেওঁ প্লেটো, এৰিষ্ট'টল, ছক্ৰেটিছ, ইউক্লিড আদি কেইবাজনো প্ৰাচীন গ্ৰীক জ্ঞান-সাধকৰ ছবি অংকণ কৰিছিল। এইসকলে নিজকে কেন্দ্ৰ কৰি তাহানিৰ গ্ৰীছত গঢ়ি তোলা জ্ঞান-চৰ্চা-কেন্দ্ৰসমূহ হৈ উঠিছিল মানৱ সভ্যতা বিকাশৰ এটি এটি কেন্দ্ৰ। ৰাফাএলৰ চিত্ৰখনে যেন সেই গোটেই সভ্যতা বিকাশৰ খনিকৰসকলক একে স্থানলৈ তুলি আনি মানুহৰ চকুৰ আগত প্ৰদৰ্শন কৰিলে। সেইবোৰ সময়ত অসমত উল্লেখযোগ্য কাম হৈছিল প্ৰধানকৈ দুটাঃ নাম গোৱা আৰু প্ৰসাদ খোৱা।

প্লেটোৱেও প্ৰতিষ্ঠা কৰিছিল এনে এটি শিক্ষা-কেন্দ্ৰ। সেই শিক্ষা-কেন্দ্ৰলৈ প্ৰেৰণ কৰা এটা প্ৰশ্ন আছিল— এটা ঘনক যদি দিয়া হয়, তেন্তে কেৱল ৰুলমাৰি আৰু কম্পাছৰ সহায়ত তাৰ দুগুণ আয়তনৰ ঘনকটো আঁকিব পৰা যাব নে নাই? হয়, দাৰ্শনিক বুলি প্ৰধানকৈ জনাজাত প্লেটোৰ একাডেমীত এইবোৰ চৰ্চা হৈছিল। তাৰ উত্তৰ প্লেটো বা তেওঁৰ ছাত্ৰসকলে দিব নোৱাৰিলে। ৰুলমাৰি আৰু কম্পাছ লৈ এই ধৰণৰ কাম প্ৰাচীন গ্ৰীকসকলে কেইবা শতিকা ধৰি কৰি আছিল। কিছুমান অংকন সহজ, তেওঁলোকে পাৰিছিল। যেনে ৰুলমাৰি আৰু কম্পাছৰ সহায়ত যিকোনো এটা কোণ সমানে দুভাগ কৰিব তেওঁলোকে পাৰিছিল। যিটো আজিকালি স্কুলীয়া ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে কৰে। কিন্তু কিছুমান অংকন তেওঁলোকে নোৱাৰিছিল। যেনে কেৱল ৰুলমাৰি আৰু কম্পাছৰ সহায়ত যিকোনো এটা কোণ সমানে তিনিভাগ কৰিব তেওঁলোকে নোৱাৰিছিল। আৰু সেইবোৰ তেনেকৈ অংকন কৰিব পৰা যাব নে নাই সেইটোৰ উত্তৰো তেওঁলোকে পোৱা নাছিল। তাৰে তিনিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দুহেজাৰ বছৰ ধৰি পৃথিৱীৰ কোনেও দিব নোৱাৰিলে। আহি আহি ঊনৈছ শতিকাত এইবোৰৰ উত্তৰ ওলাল। দুহেজাৰ বছৰ সমাধান নোলোৱা সেই প্ৰশ্ন তিনিটা এবাৰ জুকিয়াই লিখি লওঁ—

১) ৰুলমাৰি আৰু কম্পাছৰ সহায়ত এটা প্ৰদত্ত বৃত্তৰ সমান কালিৰ বৰ্গক্ষেত্ৰটো আঁকিব পাৰি নে নোৱাৰি? (এই কাৰ্যটোক চমুকৈ কোৱা হয়— বৃত্তৰ বৰ্গীকৰণ।)

২) ৰুলমাৰি আৰু কম্পাছৰ সহায়ত এটা প্ৰদত্ত ঘনকৰ দুগুণ আয়তনৰ ঘনকটো আঁকিব পাৰি নে নোৱাৰি? (এই কাৰ্যটোক চমুকৈ কোৱা হয়— ঘনকৰ দ্বিগুণীকৰণ।)

৩) ৰুলমাৰি আৰু কম্পাছৰ সহায়ত যিকোনো এটা প্ৰদত্ত কোনৰ এক তৃতীয়াংশ জোখৰ কোণ এটা আঁকিব পাৰি নে নোৱাৰি? (এই কাৰ্যটোক চমুকৈ কোৱা হয়— কোণৰ ত্ৰিখণ্ডন।)

এই অংকনসমূহ সম্ভৱ নহয় বুলি প্ৰমাণ কৰিবলৈ স্কুলীয়া পৰ্যায়ততো দিয়া নহয়েই, আনকি আমাৰ কিছুসংখ্যক বিশ্ববিদ্যালয়তহে এই সম্পৰ্কে পাঠদান হয়। বিষয়টো ইমান জটিল যদিও, আমোদজনক আৰু আশ্চৰ্যৰ কথাটো হ'ল বিভিন্ন সময়ৰ যি কেইজনমান গণিতজ্ঞৰ বাবে এইসমূহৰ প্ৰমাণ ওলাল, তেওঁলোকৰ মাজৰ মূল এজনৰ মৃত্যু হৈছিল ২১ বছৰ নহওতেই (ইভাৰিষ্ট গেল্‌ওৱা), আন এজনে এটা অতি গুৰুত্বপূৰ্ণ প্ৰমাণ দিছিল ১৯ বছৰ বয়সত (কাৰ্ল ফ্ৰিডৰিখ গাউছ), আৰু আন এজনে ইয়াৰে দুটাৰ সম্পূৰ্ণ উত্তৰ দিয়াৰ লগতে আন ব্যাখ্যাও আগবঢ়াইছিল ২৩ বছৰ বয়সত (পিয়েৰ ৱাণ্ট্‌জেল)।

ৰুলমাৰি আৰু কম্পাছৰ সহায়ত অংকন মানে কি ঃ

ৰুলমাৰিৰ অৰ্থটো হৈছে— স্কেলৰ দৰে দাগ নথকা এডাল পোন মাৰি, যাৰ সহায়ত যিকোনো সসীম দৈৰ্ঘ্যৰ সৰল ৰেখা আঁকিব পাৰি। স্কেলৰ দৰে দাগ নথকা বাবে তাৰ সহায়ত ৰেখাবোৰৰ মাপ ল'ব পৰা নাযায়।

কম্পাছৰ সহায়ত যিকোনো সসীম ব্যাসাৰ্ধৰ বৃত্ত আঁকিব পৰা যায়। কথাখিনি বুজাৰ পাছত কোনো কোনো সময়ত গোটেই বৃত্ত এটা নআঁকাকৈ প্ৰয়োজন মতে কেৱল বৃত্তটোৰ চাপ আঁকিলেও হৈ যায়।

কেৱল ৰুলমাৰি আৰু কম্পাছৰ সহায়ত কিবা এটা অংকন কৰাৰ অৰ্থটো হৈছে— ইহঁতৰ সহায়ত সৰল ৰেখা আৰু বৃত্ত বা বৃত্তৰ চাপ অংকন কৰি বস্তুটো আঁকিব লাগিব। প্ৰয়োজন হ'লে বহুবাৰ সৰল ৰেখা বা বৃত্ত আঁকিব পৰা যাব, মাথোঁ কাৰ্যখিনি সসীম সংখ্যকবাৰ কৰিব লাগিব। অসীম কাল জুৰি অসীমবাৰ আঁকিয়েই আছোঁ বুলি ধৰি ল'লে নহ'ব।

কেইটিমান সহজ অংকন ঃ

এই অংকনসমূহ প্ৰমাণ কৰিবলৈ ইউক্লিডীয় জ্যামিতি, অৰ্থাৎ সমতলীয় জ্যামিতিৰ মাথোঁ কেইটামান বৈশিষ্ট জানিলেই হয়।

এডাল প্ৰদত্ত ৰেখাৰ একে দৈৰ্ঘ্যৰ আন এডাল ৰেখাৰ অংকন ঃ

প্ৰদত্ত ৰেখাডালৰ যিকোনো এটা মূৰত কম্পাছডালৰ জোঙটো লগাই লোৱা হ'ল। তেনেকৈ ধৰি থাকি ৰেখাডালৰ আনটো মূৰত কম্পাছডালৰ পেঞ্চিলৰ আগটো লগোৱা হ'ল। কম্পাছডালৰ এই জোখটো অকণো সলনি নকৰাকৈ তাৰ পৰা উঠাই আনি তাৰ জোঙটো সমতলখনৰ আন এক বিন্দুত ৰাখি এটা বৃত্ত বা বৃত্তৰ চাপ অঁকা হ'ল। এই বিন্দুটোৰ পৰা বৃত্তটোত বা বৃত্তটোৰ চাপত থকা যিকোনো এটা বিন্দুলৈ এডাল ৰেখা টানিলেই প্ৰদত্ত ৰেখাডালৰ সমান দৈৰ্ঘ্যৰ ৰেখা এডাল পোৱা যাব।

ইয়াৰ কাৰণটো হ'ল একোটা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধবোৰৰ দৈৰ্ঘ্য সমান।

এটা প্ৰদত্ত কোণৰ একে মাপৰ আন এটা কোণৰ অংকন ঃ

প্ৰদত্ত কোণটোৰ কৌণিক বিন্দুটোক কেন্দ্ৰ কৰি এটা বৃত্ত বা বৃত্তৰ চাপ অঁকা হ'ল, যাতে চাপটোৱে বাহু দুডালক কটাকটি কৰে। ইয়াৰ পাছত কাষতে এডাল নতুন ৰেখা অংকন কৰি তাৰ এটা মূৰত কেন্দ্ৰ কৰি একে জোখৰ এটা চাপ অঁকা হ'ল।

এইবাৰ প্ৰদত্ত কোণটোৰ এডাল বাহুত চাপটোৱে কটাকটি কৰা বিন্দুটোত কম্পাছৰ জোঙটো লোৱা হ'ল। আৰু

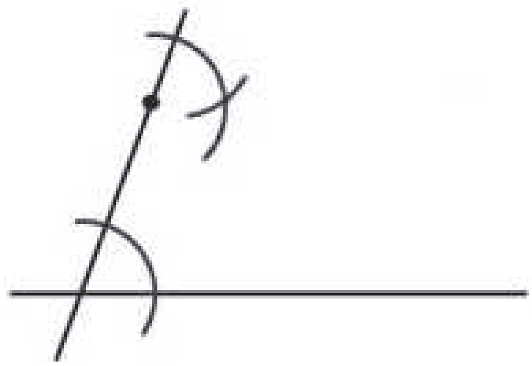
আনটো বাহুত চাপটোৱে কটাকটি কৰা বিন্দুটোৰে এটা নতুন চাপ অঁকা হ'ল। কম্পাছৰ এই জোখটো সলনি নকৰাকৈ নতুন বাহুডালৰ ক্ষেত্ৰতো একেদৰেই একেজোখৰ এটা চাপ অঁকা হ'ল। নতুন বাহুডালৰ সেই মূৰটো আৰু চাপ দুটাই কটাকটি কৰা বিন্দুটো সংযোগ কৰিলে একে জোখৰ কোণ এটা পোৱা যাব।

ইয়াৰ কাৰণটো হ'ল— প্ৰথম চাপটোৰ সহায়ত কোণ দুটাৰ বাহু দুডালৰ দৈৰ্ঘ্য সমান জোখত লোৱা হ'ল। দ্বিতীয় চাপটোৰে বাহু দুডালৰ সেই মূৰ দুটাৰ দূৰত্বটো লোৱা হ'ল। সমদ্বিবাহু ত্ৰিভূজৰ বৈশিষ্টৰ সহায়ত কোণ দুটা সমান বুলি প্ৰমাণ হ'ল।

এডাল প্ৰদত্ত ৰেখাৰ সমান্তৰাল ৰেখা এডালৰ অংকন ঃ

প্ৰথমে প্ৰদত্ত ৰেখাডালৰ এটা বিন্দুৰেদি পাৰ হৈ যোৱাকৈ আন এডাল ৰেখা অঁকা হ'ল। ৰেখা দুডালে চাৰিটা কোণ সৃষ্টি কৰিব। তাৰে এটা বাছি লোৱা হ'ল। সেই কোণটোৰ একে দিশে, সমান জোখৰ আন এটা কোণ নতুন বাহুডালৰ আন এটা বিন্দুত অঁকা হ'ল। (দুটা সমান কোণ অঁকাৰ পদ্ধতিটো ওপৰত দিয়া হৈছে।) এই তৃতীয় ৰেখাডাল প্ৰদত্ত ৰেখাডালৰ সমান্তৰাল হ'ব।

এইটো প্ৰমাণ হয় ইউক্লিডৰ পঞ্চমটো স্বীকাৰ্যৰ (যিটোক সমান্তৰাল স্বীকাৰ্য বুলিও কোৱা হয়) পৰা পোৱা এটা অনুসিদ্ধান্তৰ সহায়ত।



কেৱল এইটো পদ্ধতিৰেই নহয়, আন পদ্ধতিৰেও ৰুলমাৰি আৰু কম্পাছৰ সহায়ত সমান্তৰাল ৰেখা আঁকিব পাৰি।

প্ৰদত্ত ৰেখা এডালৰ সমান্তৰালকৈ অনিৰ্দিষ্ট ৰেখা এডাল এনেকৈ আঁকিব পৰা গ'ল। প্ৰদত্ত ৰেখাডালৰ সমান্তৰালকৈ এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰে যোৱা ৰেখাডালো আঁকিব পৰা যায়। সেইদৰে, এডাল ৰেখাৰ লম্ব এডালো সহজে আঁকিব পাৰি। ৰেখা এডালৰ মধ্যবিন্দুটোও উলিয়াব পাৰি। ৰেখা এডালৰ লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকডাল, বা এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা লম্বডালো আঁকিব পাৰি।

কোণৰ সমদ্বিখণ্ডন ঃ

প্ৰদত্ত কোণটোৰ কৌণিক বিন্দুটোক কেন্দ্ৰ কৰি এটা চাপ আঁকা হ'ল। এই চাপটোৱে বাহু দুডালক যি দুটা বিন্দুত কটাকটি কৰিলে, সেই বিন্দু দুটাক কেন্দ্ৰ কৰি পৰস্পৰে কটাকটি কৰাকৈ একে জোখৰ দুটা চাপ আঁকা হ'ল। (অৰ্থাৎ শেষত যি দুটা চাপ আঁকা হ'ল, সিহঁতৰ ব্যাসাৰ্ধ সমান হ'ব লাগিব।) প্ৰথমটোৰ চাপ ব্যাসাৰ্ধ শেষৰ দুটা চাপৰ লগত সমান হ'লেও বা নহ'লেও কোনো কথা নাই। শেষৰ চাপ দুটাই কটাকটি কৰি বিন্দুটোৰ পৰা কৌণিক বিন্দুটোলৈ টনা ৰেখাডালে প্ৰদত্ত কোণটোক সমানে দুভাগ কৰিব।

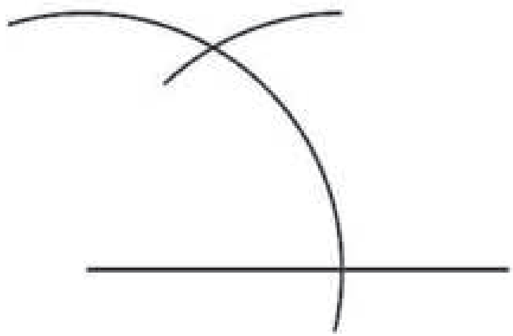
প্ৰথমটো চাপে বাহু দুডালত কটাকটি কৰা বিন্দু দুটাৰ পৰা, শেষৰ চাপ দুটাই কটাকটি কৰা বিন্দুটোলৈ দুডাল ৰেখা টানিলে দুটা ত্ৰিভূজ পোৱা যাব। বাহু-বাহু-বাহু বিধিৰে এই ত্ৰিভূজ দুটা সমান বুলি সহজে প্ৰমাণ কৰিব পাৰি। ভাগ হোৱা কোণ দুটাও সমান বুলি এনেদৰেই প্ৰমাণ হয়।

প্ৰদত্ত কোণটোৰ আধা জোখৰ কোণটো পোৱাৰ পাছত, সেইটো জোখৰ কোণ এটা বেলেগ স্থানতো ওপৰত দিয়া পদ্ধতি খটুৱাই আঁকিব পৰা যাব।

60 ডিগ্ৰী কোণৰ অংকন ঃ

ৰেখা এডালৰ এটা মূৰক কেন্দ্ৰ কৰি এটা চাপ আঁকা হ'ল। সেই চাপটোৱে ৰেখাডালত কটাকটি কৰা বিন্দুটোক কেন্দ্ৰ কৰি একে ব্যাসাৰ্ধৰ এটা চাপ আঁকা হ'ল, যাতে দ্বিতীয় চাপটোৱে প্ৰথমটো চাপক কটাকটি কৰে। ৰেখাডালৰ সেই মূৰটোৰ পৰা, চাপ দুটাই কটাকটি কৰা বিন্দুটোলৈ এডাল ৰেখা টানিলে 60 ডিগ্ৰী কোণ এটাৰ সৃষ্টি হ'ব।

উল্লেখিত তিনিওটা বিন্দু যদি পৰস্পৰে সংযোগ কৰা হয়, তেন্তে এটা সমবাহু ত্ৰিভূজ পোৱা যাব। এনেদৰেই প্ৰমাণ হয় যে কোণটো 60 ডিগ্ৰীৰ।



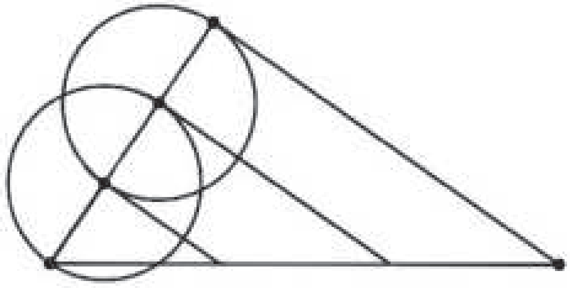
ওপৰৰ ধৰণে পদ্ধতিবোৰ খটুৱাইয়ে 30 ডিগ্ৰী, 90 ডিগ্ৰী, 45 ডিগ্ৰী, 150 ডিগ্ৰী কোণ; সমবাহু ত্ৰিভুজ, সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ, বৰ্গক্ষেত্ৰ, সুষম ষড়ভুজ, আয়তক্ষেত্ৰ, ৰম্বাছ, সামান্তৰিকো আঁকিব পাৰি। অংকনৰ পৰিমাণ অলপ কম-বেছি হ'ব পাৰে, কিন্তু এইবোৰ কেইমিনিটমানৰ কাম, স্কুলীয়া ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে সুন্দৰকৈ পৰা উচিত। সুষম পঞ্চভুজো কোনো ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে পাৰিব, সকলোৱে হয়তো নিজে নোৱাৰিব, কাৰণ এইটোত এইবোৰতকৈ কেইটামান অধিক অংকনৰ প্ৰয়োজন হয়।

ৰেখাৰ ত্ৰিখণ্ডন ঃ

প্ৰদত্ত ৰেখাডালৰ এটা মূৰেদি আন এডাল ৰেখা আঁকি লোৱা হ'ল, যাতে ইহঁতে এটা কোণ সৃষ্টি কৰে যিটো 180 ডিগ্ৰী বা 0 ডিগ্ৰী নহয়। নতুন ৰেখাডালৰ এটা বিন্দুক কেন্দ্ৰ কৰি এটা বৃত্ত আঁকা হ'ল, যাতে দুয়োডাল ৰেখাই

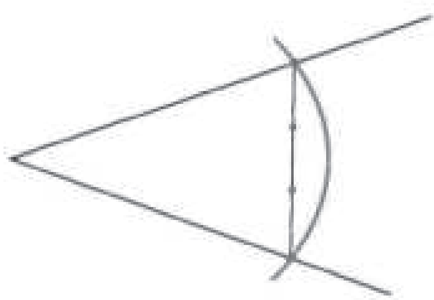
কটাকটি কৰা বিন্দুটোৰে বৃত্তটোও পাৰ হৈ যায়। এই বৃত্তটোৱে নতুন ৰেখাডালক আন এটা বিন্দুত কাটিব। এই শেষ বিন্দুটোক কেন্দ্ৰ কৰি আগৰ সমান ব্যাসাৰ্দ্ধ লৈ আন এটা বৃত্ত অঁকা হ'ল যাতে ই আগৰ বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰৰে যায়। ইয়াৰ ফলত নতুন ৰেখাডালত তিনিটা সমান সমান দৈৰ্ঘ্যৰ অংশ পোৱা গ'ল, কাৰণ বৃত্ত দুটাৰ ব্যাসাৰ্ধ সমান আছিল। আৰু নতুন ৰেখাডালৰ ওপৰত তিনিটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু পোৱা গ'ল। শেষৰ বিন্দুটোৰ পৰা প্ৰদত্ত ৰেখাডালৰ আনটো মূৰ সংযোগ কৰা হ'ল। এইডালৰ সমান্তৰালকৈ বাকী দুটা বিন্দুৰ পৰাও প্ৰদত্ত ৰেখাডাল সংযোগ কৰা হ'ল (যিটো ৰুলমাৰি আৰু কম্পাছেৰে অংকন কৰিব পাৰি)। ইয়াৰ ফলাফল ৰূপে প্ৰদত্ত ৰেখাডালৰ পৰা সমানে তিনিটা ভাগ পোৱা গ'ল।

এনেদৰে প্ৰদত্ত ৰেখাডাল সমানে তিনিভাগ হৈছে বুলি সদৃশ ত্ৰিভুজৰ বৈশিষ্টইে প্ৰমাণ কৰে।



ইয়াতকৈ সামান্য পৃথক পদ্ধতিৰেও ৰেখা এডাল সমানে তিনিভাগ কৰিব পাৰি।

যিহেতু ৰেখা এডাল সমানে তিনিভাগ কৰাটো সম্ভৱ, ইয়াৰ সহায়তে কোণ একোটাও সমানে তিনিভাগ কৰিব পৰাটো সম্ভৱ বুলি ধাৰণা আহিব পাৰে। প্ৰদত্ত কোণটোৰ কৌণিক বিন্দুটোক কেন্দ্ৰ কৰি এটা চাপ আঁকিলে, তাৰ বাহু দুডালৰ পৰা সমান দৈৰ্ঘ্য দুটা পোৱা যাব। চাপটোৰে কটাকটি কৰা বিন্দু দুটা সংযোগ কৰিলে এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ পোৱা যাব। প্ৰদত্ত কোণটোৰ এই বিপৰীত বাহুটো সমানে তিনিভাগ কৰিব পৰা যাব, আৰু ফলত বাহুটোৰ মাজত দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু পোৱা যাব। এই বিন্দু দুটা কৌণিক বিন্দুটোৰ সৈতে সংযোগ কৰিলে প্ৰদত্ত কোণটো সমানে তিনিভাগ হ'ব নেকি?



এইটো নহয় বুলি, অৰ্থাৎ ৰেখাৰ ত্ৰিখণ্ডনে কোণৰ ত্ৰিখণ্ডন সম্ভৱ নকৰে বুলি স্কুলীয়া পৰ্যায়ৰ গণিত অলিম্পিয়াডৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে প্ৰমাণ কৰিব পাৰিব, পৰীক্ষাবহীৰ এক পৃষ্ঠামানৰ ব্যাখ্যা।

অংকনযোগ্য সংখ্যা (Constructible number) ঃ

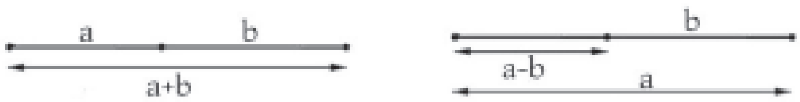
একক দৈৰ্ঘ্য এটা দিয়া থাকিলে, যদি আন কোনো এটা দৈৰ্ঘ্যৰ এডাল ৰেখাখণ্ড কেৱল ৰুলমাৰি আৰু

কম্পাছেৰে অংকন কৰিব পাৰি, তেন্তে সেই দৈৰ্ঘ্যটোক, অৰ্থাৎ সেই সংখ্যাটোক অংকনযোগ্য সংখ্যা বোলা হয়। সেই সংখ্যাটোৰ ঋণাত্মক মানটোকো অংকনযোগ্য বোলা হয়।

একক দৈৰ্ঘ্য এটাৰ এটা মূৰৰ পৰা তাৰ সমান্তৰালকৈ আন এডাল একক দৈৰ্ঘ্যৰ ৰেখাখণ্ড আঁকিব পৰা যাব দুয়োডাল মিলাই নতুন ৰেখাডালৰ দৈৰ্ঘ্য হ'ব 2। অৰ্থাৎ, 2ও অংকনযোগ্য সংখ্যা। সেইদৰে, সকলো স্বাভাৱিক সংখ্যা আৰু সিহঁতৰ ঋণাত্মকবোৰ অংকনযোগ্য।

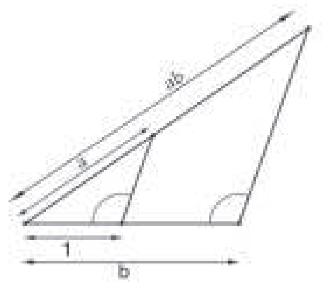
যদি a আৰু b দুটা অংকন যোগ্য সংখ্যা, তেন্তে a+b, a-b, ab, a/b (এই ক্ষেত্ৰত b অশূন্য) আৰু $\sqrt{a}$ অংকনযোগ্য।

a+b আৰু a-bৰ অংকন ঃ



2 ক অংকন কৰা পদ্ধতিৰেই a+b ক অংকন কৰিব পাৰি। আৰু a-b ক অংকন কৰিবলৈ a দৈৰ্ঘ্যৰ ৰেখাডালৰ এটা মূৰৰ পৰা তাৰ ওপৰত b দৈৰ্ঘ্যৰ ৰেখাডাল আঁকিব লাগে।

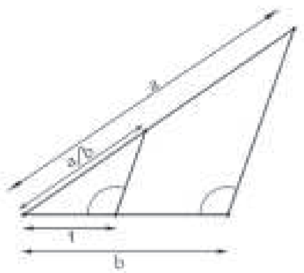
abৰ অংকন ঃ



প্ৰদত্ত a আৰু b দৈৰ্ঘ্যৰ ৰেখাখণ্ড দুডাল এটা মূৰে মূৰে লগ লগাই কোণীয়াকৈ অঁকা হ'ল। সেই কৌণিক বিন্দুটোৰ পৰা b ৰেখাডালৰ ওপৰত একক দৈৰ্ঘ্যটো অঁকা হ'ল। একক দৈৰ্ঘ্যটোৰ আনটো মূৰ আৰু a ৰ আনটো মূৰ সংযোগ কৰা হ'ল। এই ৰেখাডালৰ সমান্তৰালকৈ b ৰ আনটো মূৰৰ পৰা এডাল ৰেখা অঁকা হ'ল। এই ৰেখাডালক কটাকৈ a ক বঢ়াই দিয়া হ'ল। বৰ্ধিত a ৰ সেই অংশটোৱেই হ'ব ab।

সদৃশ ত্ৰিভুজৰ বৈশিষ্টৰ সহায়ত ইয়াৰ প্ৰমাণ সম্ভৱ হয়।

a/bৰ অংকন ঃ

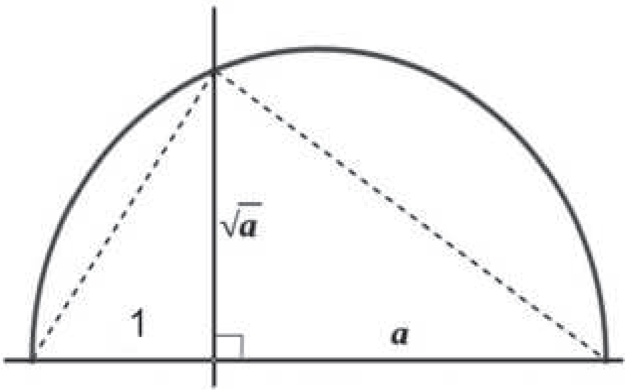


এইটো অংকনত ab ৰ অংকনটোতকৈ সামান্যহে পাৰ্থক্য আছে। ইয়াত b ৰ আনটো মূৰৰ লগত a ৰ আনটো মূৰ সংযোগ কৰি লোৱা হৈছে। ইয়াত a ৰ সলনি 1 ল'লে 1/b ও অংকনযোগ্য বুলি পোৱা যাব।

আন ধৰণেও ab আৰু a/b অংকন কৰিব পাৰি। একোটা বৃত্তৰ চাপৰ সহায়ত সিহঁতক আন স্থানলৈ নিব পাৰি। সংখ্যা-ৰেখাডালৰ ওপৰতো ইহঁতক দেখুৱাব পাৰি।

এই a/b অংকনযোগ্য মানে, প্ৰমাণ হ'ল যে সকলো পৰিমেয় সংখ্যা অংকনযোগ্য।

$\sqrt{a}$ৰ অংকণ ঃ



1+a দৈৰ্ঘ্যৰ ৰেখাখণ্ডক ব্যাস হিচাপে লৈ এটা অৰ্ধবৃত্ত আঁকা হ'ল। ব্যাসডালৰ 1 আৰু a ৰ সংযোগ বিন্দুটোত এডাল লম্ব আঁকা হ'ল। লম্বডালে অৰ্ধবৃত্তটোক এটা বিন্দুত কাটিব। ব্যাসডালৰ পৰা অৰ্ধবৃত্তটোলৈ সেই লম্বডালৰ দৈৰ্ঘ্য $\sqrt{a}$।

লম্বডালে অৰ্দ্ধবৃত্তটোত কটা বিন্দুটোৰ পৰা ব্যাসডালৰ দুই মূৰ সংযোগ কৰিলে তিনিটা সদৃশ ত্ৰিভুজ পোৱা যাব। কাৰণ, ব্যাসে বৃত্তৰ পৰিধিত উৎপন্ন কৰা কোণবোৰ 90 ডিগ্ৰীৰ। সদৃশ ত্ৰিভুজৰ বৈশিষ্টৰে সেই দৈৰ্ঘ্যটো $\sqrt{a}$ বুলি প্ৰমাণ হয়।

ইয়াত a = 2 লৈ $\sqrt{2}$ অংকন কৰিব পাৰি। পাইথাগোৰাছৰ উপপাদ্যৰ সহায়তো $\sqrt{2}$ অংকন কৰিব পাৰি।

যদি a, b, c, d, e, f, g অংকনযোগ্য, তেন্তে ওপৰৰ পদ্ধতিবোৰেৰে প্ৰমাণ হয় যে $c+b\sqrt{a}$অংকনযোগ্য।

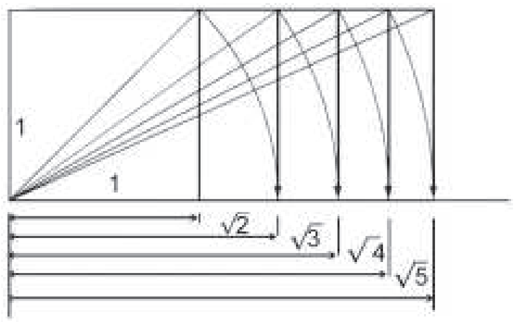
গতিকে, $e+d\sqrt{c+b\sqrt{a}}$ অংকনযোগ্য।

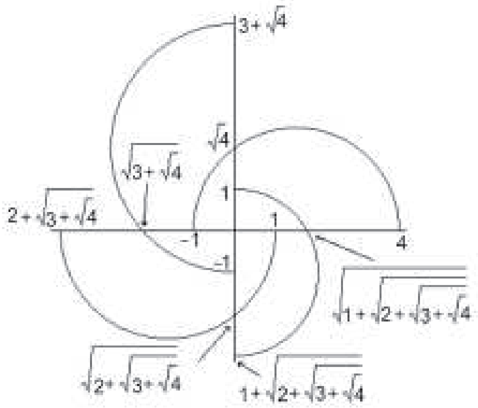
একেদৰে, $g+f\sqrt{e+d\sqrt{c+b\sqrt{a}}}$ অংকনযোগ্য।

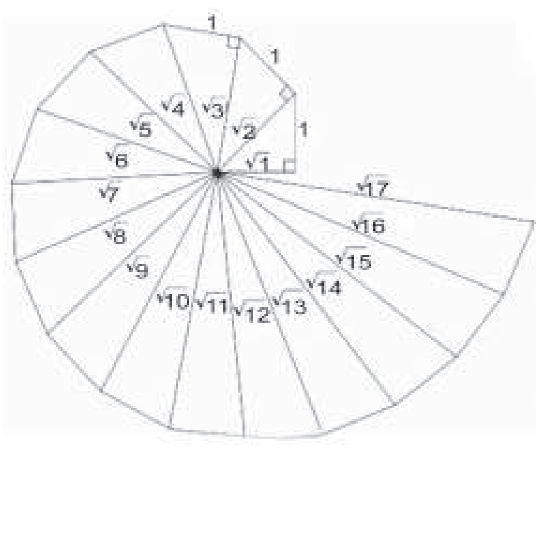
এইদৰে আৰু অধিক অংকন কৰি গৈ থাকিব পৰা যাব।

এয়া পুৰণি কালৰ কথা। তেতিয়াই মানুহে এইবিলাক অংকন কৰিবলৈ সক্ষম হৈছিল, কাৰণ ইয়াৰ বাবে ইউক্লিডৰ "এলিমেণ্টছ"ৰ (খ্ৰীঃপূঃ 300 মানতেই প্ৰকাশিত) কিছু কথাৰ বাহিৰে আন বিশেষ একো কথা নাজানিলেও হয়। সেয়েহে পুৰণি কালত, এটা বৰ্গৰ দুগুণ কালিৰ বৰ্গটো আঁকিব পাৰি বুলি মানুহে জানিছিল, আৰু তেওঁলোকে আঁকিব পাৰিছিলো। কাৰণ, প্ৰদত্ত বৰ্গটোৰ বাহুৰ দৈৰ্ঘ a হ'লে, তাৰ কালি হ'ব a^2, আৰু অংকন কৰিবলগীয়া বৰ্গটোৰ কালি হ'ব $2a^2$। অৰ্থাৎ অংকন কৰিবলগীয়া বৰ্গটোৰ বাহুৰ দৈৰ্ঘ্য $\sqrt{2}a$। প্ৰথম বৰ্গটো দিয়া আছে মানে a টো দিয়া আছে। আৰু $\sqrt{2}$ হৈছে অংকনযোগ্য সংখ্যা। গতিকে $\sqrt{2}a$ ও অংকনযোগ্য। সেয়েহে $2a^2$ কালিৰ বৰ্গটোও আঁকিব পৰা যায়।

কেইটামান সহজ আৰু মোহনীয় উদাহৰণ ঃ







ঊনৈছ শতিকাত সৃষ্টি হোৱা দুখন অভিনৱ আৰু অসাধাৰণ সাঁকো ঃ

ইউক্লিডৰ “এলিমেণ্টছ”ৰ সময়ৰ পৰা কেইবা শতিকা পাৰ হৈ যোৱাৰ পাছত “স্থানাংক জ্যামিতি” বুলি এবিধ জ্যামিতি উদ্ভাৱন কৰা হ’ল। ইয়াৰ পূৰ্ণ বিকাশ সাধন হ’ল সোতৰ শতিকাৰ প্ৰথমভাগত। আৰু তেতিয়াই এই নতুন বিষয়টোত নিহিত থকা বিশেষ বিশেষ বৈশিষ্ট কিছুমান আৱিষ্কাৰ হ’বলৈ ধৰিলে। বীজগণিত, ত্ৰিকোণমিতি, ইউক্লিডীয় জ্যামিতি আদিও প্ৰয়োগ হৈছে ইয়াত।

স্থানাংক জ্যামিতিত ৰেখা, বৃত্ত আদি কিছুমান আকৃতি এটা সমীকৰণৰ সহায়ত পোৱা যায়। স্থানাংক জ্যামিতিত এখন সমতলত ৰেখাৰ সাধাৰণ সমীকৰণটো হ’ল $ax + by + c = 0$, য’ত a, b, c বাস্তৱ সংখ্যা আৰু x, y চলক আৰু (h, k) কেন্দ্ৰ সাপেক্ষে r ব্যাসাৰ্ধৰ বৃত্তটোৰ সমীকৰণটো হ’ল $(x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2 = 0$।

স্থানাংক জ্যামিতিত এটা বিন্দু অংকনযোগ্য হ’ব, যদিহে তাৰ স্থানাংক দুটা অংকনযোগ্য সংখ্যা। ৰুলমাৰি আৰু কম্পাছেৰে অংকন কৰি থাকোঁতে আচলতে কৰি থকা হয় কি? কিছুমান নতুন নতুন অংকনযোগ্য বিন্দু তিনিটা ধৰণেৰে উলিয়াই থকা হয় ঃ

১) দুডাল ৰেখাই কটাকটি কৰা বিন্দু উলিওৱা হয়,

২) ৰেখা এডালে বৃত্ত একোটাক কটাকটি কৰা বিন্দু উলিওৱা হয়,

আৰু ৩) দুটা বৃত্তই কটাকটি কৰা বিন্দু উলিওৱা হয়।

এই কটাকটি কৰা বিন্দুবোৰ সমীকৰণ সমাধান কৰি উলিয়াব পৰা যায়। তাৰবাবে দুডাল ৰেখাৰ সমীকৰণ সমাধান কৰিব লাগিব; বা এডাল ৰেখা আৰু এটা বৃত্তৰ সমীকৰণ সমাধান কৰিব লাগিব বা দুটা বৃত্তৰ সমীকৰণ সমাধান কৰিব লাগিব। অৰ্থাৎ এই সমীকৰণ সমাধান কাৰ্যবোৰত, ওপৰত উল্লেখ কৰা দুবিধ সমীকৰণেই মাথোঁ জড়িত হৈ থাকে।

এই ধাৰণাখিনিয়ে এখন সাঁকো গঢ়ি তিনিওটা প্ৰশ্নক ইউক্লিডীয় জ্যামিতিৰ পৰা তুলি আনি স্থানাংক জ্যামিতি পোৱালেহি। কিন্তু সিহঁতৰ উত্তৰ বিচাৰিবলৈ ইয়াতো একো উপায় নাই। প্ৰশ্ন তিনিটাৰ উত্তৰ পাবলৈ ইয়াৰ পৰা একেকোবেই যাব লাগিব বিমূৰ্ত বীজগণিতৰ এটি বিশেষ শাখালৈ। তাৰ বাবে আৰু দুশ বছৰ আগুৱাই আহিব লাগিব।

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটো (যাক Z ৰে বুজোৱা হয়) আৰু অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগৰ প্ৰক্ৰিয়াটো যদি চোৱা হয়, তেন্তে

ক) তাৰ যিকোনো দুটা সংখ্যা (মৌল) যোগ কৰিলে নতুন সংখ্যাটো সংহতিটোতে থাকে।

খ) ইয়াৰ গোটেই সংখ্যাবোৰে যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ সাপেক্ষে সহযোগ বিধি মানি চলে।

গ) ইয়াত এটা নিৰ্দিষ্ট বিশেষ সংখ্যা আছে, 0, যাৰ লগত আন যিকোনো সংখ্যা এটা যোগ কৰিলে যোগ কৰা সংখ্যাটোকে পোৱা যায়। সেই সংখ্যাটোক এই প্ৰক্ৰিয়াটোৰ সাপেক্ষে অভেদ (identity) বুলি কোৱা হয়।

ঘ) প্ৰতিটো সংখ্যাৰ বাবে আন এটা সংখ্যা থাকে, যি দুটাক যোগ কৰিলে 0 টো, মানে সেই identity পোৱা যায়। যেনে ঃ 5 ৰ বাবে -5 আছে, দুয়োটা যোগ কৰিলে 0। এই ক্ষেত্ৰত এটাক আনটোৰ যোগাত্মক বিপৰীত সংখ্যা বোলে।

এইটো এটা উদাহৰণ। সংহতিটো বা তাৰ লগত জড়িত প্ৰক্ৰিয়াটো বেলেগ বেলেগ হ’ব পাৰে। সংহতিটো বা প্ৰক্ৰিয়াটো যিয়েই নহওক, এই চাৰিটা বৈশিষ্ট মানি চলিলে সংহতিটোক সেই প্ৰক্ৰিয়াটো সাপেক্ষে এটা সংঘ (group) বুলি কোৱা হয়। যদিহে সি ক্ৰম বিনিময় বিধিও মানি চলে, তেন্তে সংঘটোক এবেলীয় সংঘ (Abelian group) বোলে। গণিতজ্ঞ এবেলৰ নামেৰে ইয়াৰ নামকৰণ কৰা হৈছে। অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটো যোগ সাপেক্ষে এটা সংঘ, ইয়াক গাণিতিক ভাষাৰে কোৱা হয় ঃ (Z, +) এটা সংঘ। আৰু (Z, +) হ’ল এটা এবেলীয় সংঘ।

কিন্তু, পূৰণ সাপেক্ষে Z টো সংঘ নহয়। অৰ্থাৎ (Z, .) সংঘ নহয়। কাৰণ, ইয়াত প্ৰতিটো সংখ্যাৰে বিপৰীতটো

পোৱা নাযায়। পূৰণ সাপেক্ষে identity টো হ'ল 1। এতিয়া উদাহৰণস্বৰূপে 5 ৰ গুণাত্মক বিপৰীত সংখ্যাটো হ'ব 1/5, কিন্তু এইটো অখণ্ড সংখ্যা নহয়।

পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতিটোক Q ৰে বুজোৱা হয়। (Q,+) এটা এবেলীয় সংঘ, আৰু (Q-{0}, .) ও এটা এবেলীয়া সংঘ।

যদি F এটা সংহতি, আৰু (F,+) আৰু (F-{0}, .) উভয়ে এবেলীয় সংঘ হয়, তেন্তে এই দুয়োটা প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে F ক এটা ক্ষেত্ৰ (field) বুলি কোৱা হয়, যদিহে পূৰণে যোগ সাপেক্ষে বিতৰণ বিধি মানি চলে। উদাহৰণ স্বৰূপে, ভাষাৰে কোৱা হয় (F, +, .) এটা ক্ষেত্ৰ। গতিকে (Q, +, .) এটা ক্ষেত্ৰ। কিন্তু (Z, +, .) ক্ষেত্ৰ নহয়।

যদি (E, +) এটা সংঘ আৰু F হ'ল E ৰ এটা অ-ৰিক্ত (non-empty) উপসংহতি, তেন্তে (F, +) ও এটা সংঘ হ'লে তাক E ৰ উপসংঘ (subgroup) বুলি কোৱা হয়। ক্ষেত্ৰৰ বাবে এইটোক কোৱা হয় উপক্ষেত্ৰ (subfield)। যেনে, (Z, +) হ'ল (Q, +)ৰ উপসংঘ। (Z, .) টো (Q, .) ৰ উপসংঘ নহয়। (Z, +, .) টো (Q, +, .) ৰ উপক্ষেত্ৰ নহয়।

(F, +, .) টো (E, +, .) ৰ উপক্ষেত্ৰ হ'লে, E ক F ৰ প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰ (extension field) বুলি কোৱা হয়। প্ৰয়োজন হ'লে F ক প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰখনৰ আধাৰ (base) বুলি কোৱা হয়। গাণিতিকভাৱে ইয়াক E/F বুলি লিখা হয়। এই বস্তুটোৱেই আমাক এতিয়া প্ৰয়োজন হ'ব। ই বিমূৰ্ত বীজগণিতৰ এটি ক্ষুদ্ৰ শাখা। কিন্তু ইয়াকে লৈ শ শ পৃষ্ঠা লিখা হৈছে, শ শ গৱেষণা-পত্ৰ ওলাইছে, এতিয়াও বিষয়টোৰ গভীৰৰ পৰা গভীৰলৈ বহু গণিতজ্ঞই অধ্যয়ন চলাই গৈ আছে। ইয়াত, সেই প্ৰশ্ন তিনিটাৰ বাবে প্ৰয়োজনীয় কেইটামান মূল মূল কথাহে উল্লেখ কৰা হ'ব।

প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰ কিছুমানৰ এটা বৈশিষ্ট হ'ল, তাৰ গোটেই মৌলবোৰ পোৱাত তাৰ আধাৰ ক্ষেত্ৰখনে বিশেষ ভূমিকা গ্ৰহণ কৰে। বীজগণিতত Vector space আৰু তাৰ মাত্ৰা সম্পৰ্কীয় ধাৰণা আছে। তাত কোনোবা এবিধ প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে এটা এবেলীয়া সংঘ থাকে, আৰু তাৰ মৌলবোৰৰ লগত এটা ক্ষেত্ৰৰ মৌলবোৰে আন এবিধ প্ৰক্ৰিয়াৰ সাপেক্ষে কেইটামান বিধি মানি চলে। E যদি প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰ হয়, তেন্তে সি এবিধ যোগৰ সাপেক্ষে এবেলীয় সংঘ হয়েই। আৰু F টো E ৰ উপক্ষেত্ৰ হোৱা বাবে, F ৰ সাপেক্ষে E টো এটা Vector space ত পৰিণত হয়। ইয়াৰ মাত্ৰাক [E : F] ৰে বুজোৱা হয়। ধৰা হওক [E : F] = n, যিকোনো এটা সসীম স্বাভাৱিক সংখ্যা। তেন্তে F ৰ মৌলবিলাকৰ লগত E ৰ মাথোঁ কেইটামান বিশেষ মৌলৰ সহায়ত E ৰ গোটেই মৌলবিলাক গম পোৱা যায়। কেতিয়াবা আনকি F ৰ মৌলবিলাকৰ লগত E ৰ কেৱল এটা মৌল হ'লেই হ'ল। আৰু E ৰ সেই বিশেষ মৌলটোক/মৌলকেইটাক এটা বহুপদ ৰাশিৰ সহায়ত পোৱাটো সম্ভৱ হ'ব পাৰে। আৰু সেই বহুপদ ৰাশিটোৰ সহগবোৰ F তে থাকে। কথাবিলাক উদাহৰণেৰে চোৱা যাওক—

(Q, +, .) টো এটা ক্ষেত্ৰ। ইয়াত গোটেই পৰিমেয় সংখ্যাবোৰ আছে। এটা বিশেষ অপৰিমেয় সংখ্যা $\sqrt{2}$। আটাইতকৈ অধিক পৰিচিত অপৰিমেয় সংখ্যাৰ মাজত ইও এটা। ই Q ত নাই।

Q আৰু $\sqrt{2}$ ৰ সহায়ত এক ধৰণৰ নতুন সংহতি এটা গঠন কৰা হ'ল ঃ $Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}: a, b \in Q\}$।

তেতিয়া $Q(\sqrt{2})$ টো Q ৰ এটা প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰ হ'ব আৰু $[Q(\sqrt{2}) : Q] = 2$। মাত্ৰা 2 হ'লে প্ৰসাৰণটোক দ্বিঘাত প্ৰসাৰণ বোলে।

$Q(\sqrt{2})$ ৰ মৌলবোৰক Q ৰ মৌলবোৰ আৰু $\sqrt{2}$ ৰ সহায়তে পোৱা যায়। আকৌ, $\sqrt{2}$ ক পোৱা যায় $X^2 - 2$ বহুপদ ৰাশিটোৰ শূন্য হিচাপে, বহুপদ ৰাশিৰ সহগবোৰ Q তে আছে। এই বহুপদ ৰাশিটোৰ মাত্ৰাও।

একেদৰেই এইবাৰ Q ($\sqrt{2}$) ত থকা বহুপদ ৰাশিৰ সহায়ত Q ($\sqrt{2}$)ক প্ৰসাৰণ কৰিব পৰা যায়। সেই নতুনটোকো আকৌ প্ৰসাৰণ কৰিব পৰা যাব।

সাধাৰণভাৱে ক'বলৈ গ'লে, যদি Fত নথকা কোনোবা এটা মৌলই Fৰে এটা n মাত্ৰাৰ বহুপদ ৰাশিক সিদ্ধ কৰে, তেন্তে F ৰ এটা প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰ Eপোৱা যাব, আৰু $[E : F] \leq n$। আনহাতে, $F \subseteq E \subseteq D$ তিনিটা ক্ষেত্ৰ হ'লে, $[D : F] = [D : E]\ [E : F]$।

ৰুলমাৰি আৰু কম্পাছৰ সহায়ত অংকন কৰোঁতে, অৰ্থাৎ দুটা সমীকৰণ সমাধান কৰোঁতে এনেকুৱা এটা বহুপদ ৰাশিৰ মূল উলিওৱা হয় যাৰ মাত্ৰা অতি বেছি 2 হ'ব পাৰে। গতিকে সেই মূলখিনি ক্ষেত্ৰ এটাৰ প্ৰসাৰণ এটাত থাকিব যাৰ মাত্ৰা অতি বেছি 2 হ'ব। গতিকে, এলানি অংকন সম্পূৰ্ণ কৰা মানে এটাৰ পাছত এটাকৈ প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰ পাই গৈ থকা বুজাব, আৰু প্ৰত্যেকবাৰেই মাত্ৰা হ'ব অতি বেছি 2। অৰ্থাৎ এটা অংকন সম্পূৰ্ণ কৰাৰ পাছত সৰ্বশেষ যিটো প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰ পোৱা যাব, আধাৰ ক্ষেত্ৰখনৰ ভিত্তিত তাৰ মাত্ৰা হ'ব 2^n, য'ত n কোনোবা এটা সমীম স্বাভাৱিক সংখ্যা। এনেকৈয়ে তিনিওটা প্ৰশ্ন আহি বিমূৰ্ত বীজগণিতত প্ৰৱেশ কৰিলে— ৰুলমাৰি আৰু কম্পাছ লৈ সমতলত জ্যামিতি অংকন কৰি থকা কামটোৰ লগত যিটো বিষয়ৰ পোনপটীয়া কোনো সম্পৰ্কই নাছিল।

আৰু বহুতো বৈশিষ্ট ইয়াত প্ৰয়োগ হ'ব। কোনোবা এটা সংখ্যাই যদি 1 মাত্ৰাৰ বহুপদ ৰাশি (যিটোক ৰৈখিক ৰাশি বুলি কোৱা হয়) এটা সিদ্ধ কৰে, তেন্তে বহুপদ ৰাশিটো যিটো ক্ষেত্ৰত আছে সংখ্যাটোও সেইটো ক্ষেত্ৰতে থাকিব লাগিব। যিকোনো এটা n মাত্ৰাৰ বহুপদ ৰাশিক n টা ৰৈখিক ৰাশিৰ গুণফল ৰূপে ভাঙি প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। কিন্তু সেই প্ৰতিটো ৰৈখিক ৰাশিৰ বাবে প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰটো বেলেগ বেলেগ হ'ব পাৰে। তাৰমানে কিছুমান বহুপদ ৰাশি আধাৰ ক্ষেত্ৰটোতে ৰৈখিক ৰাশিৰ গুণফল ৰূপে ভাঙিব নোৱাৰি। বা আধাৰ ক্ষেত্ৰটোত সেই বহুপদ ৰাশিটোক কোনো ধৰণেৰে ভাঙিবই নোৱাৰি। যেনে x^2-4ক Qত ভাঙিব পাৰি, কিন্তু x^2-2 আৰু x^3-2ক নোৱাৰি। x^2-2ক Q ($\sqrt{2}$)ত ভাঙিব পাৰি, কিন্তু x^3-2ক তাতো নোৱাৰি। আচলতে, x^3-2ক ৰৈখিক ৰাশিৰ গুণফল ৰূপে ভাঙিব পৰা প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰবোৰত জটিল সংখ্যাও যুক্ত হৈ আছে, আৰু x^3-2 ৰ বাবে তেনেকুৱা এটা ক্ষেত্ৰৰ ন্যুনতম মাত্ৰা 6। যদিহে কোনো সংখ্যাই আধাৰ ক্ষেত্ৰটোত সিদ্ধ কৰা n মাত্ৰাৰ বহুপদ ৰাশি এটাক আধাৰ ক্ষেত্ৰটোতে ভাঙিব নোৱাৰি, তেন্তে সেই সংখ্যাটো n মাত্ৰাৰ প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰ এটাত থাকে।

প্ৰশ্ন তিনিটা আন গাণিতিক ভাষালৈ ৰূপান্তৰ ঃ

এতিয়া তিনিওটা প্ৰশ্ন বীজগণিতীয় ভাষালৈ লৈ যাব পাৰি আৰু একেবাৰে সৰল ৰূপ এটা উলিয়াই ল'ব পাৰি ঃ

(1) সাধাৰণ বৃত্ত এটাৰ কালি πr^2। এই r টো অংকনযোগ্য হ'ব পাৰে, সেয়েহে ইয়াক 1 বুলি ধৰি লওঁ। গতিকে বৃত্তটোৰ কালি হ'ল π। তেতিয়া আঁকিবলগীয়া বৰ্গটোৰো কালি π হ'ব। যদি $\sqrt{\pi}$ অংকনযোগ্য, তেন্তে বৰ্গটোৰ বাহুবোৰ পাম। আকৌ $\sqrt{\pi}$ অংকনযোগ্য হ'ব যদিহে π অংকনযোগ্য। সেয়েহে প্ৰশ্নটো হ'লগৈ ঃ π অংকনযোগ্য হয় নে নহয়? (বৃত্তৰ বৰ্গীকৰণ।)

(2) সাধাৰণ ঘনক এটাৰ আয়তন a^3। ইয়াৰ দুগুণটো $2a^3$। গতিকে নতুন ঘনকটোৰ বাহুৰ দৈৰ্ঘ্য $\sqrt[3]{2}\,a$। এই a টো অংকনযোগ্য হ'ব পাৰে, সেয়েহে ইয়াক 1 বুলি ধৰি লওঁ। তেতিয়া আঁকিবলগীয়া ঘনকটোৰ বাহুৰ দৈৰ্ঘ্য হ'ব $\sqrt[3]{2}$ । সেয়েহে প্ৰশ্নটো হ'লগৈ ঃ $\sqrt[3]{2}$ অংকনযোগ্য হয় নে নহয়? (ঘণকৰ দ্বিগুণীকৰণ।)

(3) আমাৰ লগত একক দৈৰ্ঘ্য এটা সদায় আছে। যদি এটা কোণ θ অংকনযোগ্য, তেতিয়া কোণটোৰ এটা বাহুত এটা অংকনযোগ্য বিন্দু লৈ দৈৰ্ঘ্যটো ভূমি বুলি ধৰিব পাৰি। এনেদৰে কোণটোৰ বাবে ভূমি, লম্ব আৰু অতিভুজ পাব পাৰি। সিহঁতৰ অনুপাতবোৰো অংকনযোগ্য হ'ব। গতিকে θ অংকনযোগ্য হ'লে $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ অংকনযোগ্য।

ইয়াৰ ওলোটাটোও শুদ্ধ। গতিকে, কোনোবা এটা প্ৰদত্ত কোণ θৰ বাবে $\theta/3$ অংকনযোগ্য হ'বলৈ $\cos(\theta/3)$ অংকনযোগ্য হ'ব লাগিব। সেয়েহে প্ৰশ্নটো হ'লগৈ ঃ যিকোনো কোণ θৰ বাবে $\cos(\theta/3)$ অংকনযোগ্য হয় নে নহয়? (কোণৰ ত্ৰিখণ্ডন।)

উত্তৰসমূহ ঃ

যিহেতু (Q, +, .) ৰ সকলো সংখ্যাই অংকনযোগ্য, গতিকে এইটো এতিয়া স্পষ্ট যে অংকনযোগ্য নতুন সংখ্যা এটা উলিয়ালে সি Qৰ প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰ এখনত থাকিবই লাগিব, আৰু প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰখনৰ মাত্ৰাটোৰ বিশেষ এটা আৰ্হি পোৰা গ'ল। সেই আৰ্হিটোত π, $\sqrt[3]{2}$ আৰু $\cos(\theta/3)$ থাকিব নে নাথাকে বা সিহঁত Qৰ প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰ এখনত থাকিব নে নাথাকে তাৰ ভিত্তিতে প্ৰশ্ন তিনিটাৰ উত্তৰ ওলাই পৰিল। ১৮৩৭ চনত প্ৰকাশিত এখন গৱেষণা-পত্ৰৰে পিয়েৰ ৱাণ্টজেল (Pierre Wantzel) নামৰ ফৰাচী গণিতজ্ঞ এজনে ঘনকৰ দ্বিগুণীকৰণ আৰু কোণৰ ত্ৰিখণ্ডন অসম্ভৱ বুলি প্ৰমাণ কৰিলে।

$\sqrt[3]{2}$ য়ে x^3-2ক সিদ্ধ কৰে। এই বহুপদ ৰাশিটো Q তে আছে, কিন্তু ইয়াক Q ত ৰৈখিক ৰাশিৰ গুণফল ৰূপে ভাঙিব নোৱাৰি। অকণমানি প্ৰমাণ এটাৰে নোৱাৰি বুলি দেখুৱাব পাৰিব। এইটো এতিয়া গণিতৰ স্নাতক-স্নাতকোত্তৰ শ্ৰেণীত বহুতে কৰে। গতিকে $\sqrt[3]{2}$ টো 3 মাত্ৰাৰ প্ৰসাৰণ ক্ষেত্ৰ এটাত থাকিব। 3 টোক 2 বা 2ৰ ঘাতৰ পূৰণফল ৰূপে প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি। গতিকে $\sqrt[3]{2}$ অংকনযোগ্য নহয়। গতিকে ঘনকৰ দ্বিগুণীকৰণ অসম্ভৱ।

কিছুমান কোণক সমানে তিনিভাগ কৰিব পাৰি। যেনে ঃ 90 ডিগ্ৰী কোণ, 180 দিগ্ৰী কোণ। 90 ডিগ্ৰী কোণৰ এটা বাহুৰ পৰা 60 ডিগ্ৰী কোণ এটা অংকণ কৰিলেই 30 ডিগ্ৰী কোণটো ওলাই পৰিব। কিন্তু অধিক সংখ্যক কোণক নোৱাৰি। নোৱাৰি বুলি প্ৰমাণ কৰিবলৈ এটা উদাহৰণ ওলালেও যথেষ্ঠ। আৰু ৱাণ্টজেলে 60 ডিগ্ৰী কোণটোক নোৱাৰি বুলি প্ৰমাণ কৰিলে।

$\cos 3\theta = 4\cos 3\theta - 3\cos\theta$

$\Rightarrow \cos 60 = 4\cos^3 20 - 3\cos 20$

$\Rightarrow {}^1/_2 = 4\cos^3 20 - 3\cos 20$

$\Rightarrow 8\cos^3 20 - 6\cos 20 - 1 = 0$

$\Rightarrow (2\cos 20)^3 - 3.2\cos 20 - 1 = 0$

অৰ্থাৎ $2\cos 20$ যে x^3-3x-1 বহুপদ ৰাশিটো সিদ্ধ কৰে, যিটো বহুপদ ৰাশি Q ত আছে। ইয়াত $\cos 20$ৰ সলনি $2\cos 20$ হোৱা বাবে কোনো সমস্যা নহয়, কাৰণ 2 টো অংকনযোগ্য।

এই বহুপদ ৰাশিটো Qত ভাঙিব নোৱাৰি। সেয়েহে $2\cos 20$ টো Qৰ এটা প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰত থাকিব, যাৰ মাত্ৰা 3। গতিকে $2\cos 20$ অংকনযোগ্য নহয়। আৰু ফলত $\cos 20$ ও অংকনযোগ্য নহয়। গতিকে কোণৰ ত্ৰিখণ্ডন অসম্ভৱ বুলি প্ৰমাণিত। (অৱশ্যে, ৱাণ্টজেলে আজিৰ পৰা প্ৰায় দুশ বছৰ আগতেই লিখা যুক্তিখিনিৰ গাণিতিক ভাষা আজি আমি পঢ়া বা লিখা ভাষাতকৈ অলপ বেলেগ।)

এই দুটা প্ৰমাণ হ'ল যদিও বৃত্তৰ বৰ্গীকৰণ সম্ভৱ নে অসম্ভৱ সেইটো প্ৰমাণ নোহোৱাকৈ আৰু প্ৰায় 45 বছৰ থাকিল। 1882 চনত ফাৰ্ডিনাণ্ড ভন লিণ্ডামেন নামৰ এজন গণিতজ্ঞই π য়ে Qৰ কোনো বহুপদ ৰাশিক সিদ্ধ নকৰে বুলি প্ৰমাণ কৰিলে। এইটো আছিল আনধৰণে উদ্ভৱ হোৱা এটা পুৰণি সমস্যা। এইটো প্ৰমাণ হোৱাৰ লগে লগে বৃত্তৰ বৰ্গীকৰণ অসম্ভৱ বুলি প্ৰমাণ হৈ পৰিল। কাৰণ, ইয়াৰ দ্বাৰা প্ৰমাণ হ'ল যে π টো Q ৰ এনেকুৱা এখন প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰত আছে, যাৰ মাত্ৰা সসীমেই নহয়।

আন আন প্ৰশ্নৰ উত্তৰবোৰ ঃ

সুষম পঞ্চভূজ, সুষম ষড়ভুজ আঁকিব পাৰি বুলি আগত কৈ আহিছোঁ। কিন্তু সুষম সপ্তভুজ নোৱাৰি। n টো 2^k আৰ্হিত থাকিলে n বাহুযুক্ত সুষম বহুভুজবোৰ অংকনযোগ্য বুলি অতীজতে পোৱা গৈছিল। আন দুই-এটা আৰ্হিৰ বাবেও পোৱা গৈছিল। কিন্তু সাধাৰণভাৱে কোনবোৰ পাৰি কোনবোৰ নোৱাৰি তাক জানিবলৈও মানুহে কেইবা শতিকা যুঁজি থাকিব লগা হ'ল।

ৱাণ্টজেলৰ গৱেষণা-পত্ৰখন প্ৰকাশৰ প্ৰায় 40 বছৰ পূৰ্বে গাউছে 17টা বাহুযুক্ত সুষম বহুভুজ আঁকিব পাৰি বুলি প্ৰমাণ কৰিছিল। তাৰে কেইবছৰমান পাছত গাউছে এটা চৰ্তও আবিষ্কাৰ কৰিছিল, যিটো মানি চলা সুষম বহুভুজবোৰ অংকনযোগ্য হয়। তেওঁ সেইটো প্ৰমাণ কৰিলে। কিন্তু সেই চৰ্তটো লাগিবই নেকি সেইটো প্ৰমাণ তেওঁ নিদিলে বা দিব নোৱাৰিলে। কথাটো এনেকুৱা— সংখ্যা এটাৰ এককৰ ঘৰৰ অংকটো 4 ৰে হৰণ গ'লে সংখ্যাটো যুগ্ম হ'বই। কিন্তু অংকটো 4 ৰে হৰণ যাব লাগিবই নেকি? 4 ৰে হৰণ নগ'লেও হ'ব, কিন্তু 2 ৰে হৰণ যাব লাগিবই।

ৱাণ্টজেলে সেই একেখন গৱেষণা-পত্ৰতে সেই চৰ্তটো লাগিবই বুলি প্ৰমাণ কৰিলে। প্ৰমাণটো এতিয়া তিনিটামান পেৰাগ্ৰাফত লিখিব পাৰি, কিন্তু সেইটো বুজিবলৈ প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰ কিছুমানৰ বৈশিষ্টবোৰ তৰপে তৰপে গভীৰলৈ আয়ত্ব কৰি ল'ব লাগিব। ওপৰত সংঘৰ কথা কোৱা হৈছিল; গেলওৱাক সংঘ-তত্বৰ জনক বুলি কোৱা হয়। গেলওৱাই সংঘ-তত্ব আৰু ক্ষেত্ৰ-তত্বৰ মাজত এটি সংযোগ আৱিষ্কাৰ কৰিলে। সেইখিনিৰ সহায়ত কিছুমান ক্ষেত্ৰ তথা প্ৰসাৰিত ক্ষেত্ৰক বহু গভীৰলৈকে আয়ত্ব কৰাটো সম্ভৱ হৈ পৰিল। ৱাণ্টজেলে সেইখিনি প্ৰয়োগ কৰিলে। ক্ষেত্ৰ-তত্বৰ নতুন পাঠকে সেইখিনি আয়ত্ব কৰিবলৈ কমেও এই লেখাটোৰ দুগুণ দৈৰ্ঘ্যৰ কথা ব্যাখ্যা কৰিব লাগিব। সেয়েহে কেৱল চৰ্তটো উল্লেখ কৰি থওঁ—

n টা বাহুযুক্ত সুষম বহুভুজ এটা অংকনযোগ্য হ'ব আৰু মাত্ৰ যদিহে n টো তলত দিয়া আৰ্হিটোত থাকে—

$n=2^k p_1 p_2 .... Pm,$

য'ত $p_1, p_2, ..., Pm$ হ'ল m টা পৃথক ফাৰ্মা মৌলিক সংখ্যা, আৰু k এটা অঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

ফাৰ্মা মৌলিক সংখ্যাবোৰ $2^{2a}+1$ আৰ্হিত থাকে, য'ত a অঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। এতিয়ালৈকে পাঁচটা ফাৰ্মা মৌলিক সংখ্যা পোৱা গৈছে। সেই কেইটা হ'ল 1, 5, 17, 257 আৰু 65537। ওপৰৰ k টো শূন্য হ'লে nটো অযুগ্ম হ'ব। পাঁচটা ফাৰ্মা মৌলিক সংখ্যাৰে 31টা অযুগ্ম n পোৱা যাব। সেয়েহে, অযুগ্ম সংখ্যক বাহুযুক্ত সুষম বহুভুজ এতিয়ালৈকে কেৱল 31 টা পোৱা গৈছে (আৰু যুগ্ম বাহুযুক্ত অসীম আছে।) 7 টো ফাৰ্মা মৌলিক নহয় বাবে সুষম সপ্তভুজ অংকণযোগ্য নহয়।

আন কিছুমান প্ৰশ্ন হ'ল— কেনেকুৱা ধৰণৰ কোণৰ ত্ৰিখণ্ডন সম্ভৱ? কোনবিলাক কোণ অংকনযোগ্য? কোণ একোটাক সমানে আৰু অধিক কেইটা ভাগ কৰিব পাৰি? সেইবোৰৰ চৰ্তবোৰ কেনেকুৱা হ'ব? এইবোৰৰ কিছুমানৰ উত্তৰ পোৱা হৈছে।

আন এক জটিলতা ঃ

কিবা এটা চিত্ৰ অংকনযোগ্য হয় নে নহয় সেইটোহে ক্ষেত্ৰ-তত্বই প্ৰমাণ কৰে। অংকনযোগ্য বুলি জনাৰ পাছতো কিবা এটা অংকন কৰিবলৈ এটা সাধাৰণ আৰ্হি নাই, বা এতিয়ালৈকে ওলোৱা নাই। যেনে 17 টা বাহুযুক্ত সুষম বহুভূজ অঁকাটোও ওপৰত দিয়া অংকনবোৰৰ তুলনাত সামান্য জটিল। 65537 টা বাহুযুক্ত এটা সুষম বহুভূজ অঁকাৰ এটা পদ্ধতি জাৰ্মান গণিতজ্ঞ এজনে দহ বছৰ লাগি 1894 চনত উলিয়াইছিল। যিটো বৰ্ণনা দিবলৈ তেওঁক প্ৰায় দুশ পৃষ্ঠা লাগিছিল। 257 টা বহুযুক্ত সুষম বহুভুজ অঁকাৰ তিনিটা পদ্ধতি এতিয়ালৈকে ওলাইছে। 4294967295 টা বাহুযুক্ত সুষম বহুভূজ অঁকাৰ কোনো পদ্ধতি এতিয়াও নাই।

পংকজ জ্যোতি মহন্তই সদ্যহতে গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়ৰ গণিত বিভাগত গৱেষণা কৰি আছে।