মোৰ শেহতীয়া এখন গৱেষণা-পত্ৰ

ড° নিলুফাৰ মানা বেগম

সহকাৰী অধ্যাপিকা, গণিত বিভাগ, দেৰৰাজ ৰয় মহাবিদ্যালয়, গোলাঘাট, অসম

মোৰ শেহতীয়া গৱেষণা-পত্ৰ এখনি হৈছে "Proofs of some conjectures of Chan on Appell–Lerch sums". এই গৱেষণা-পত্ৰখন ২০১৯ চনৰ ১৭ জানুৱাৰীত "The Ramanujan Journal"ৰ ৫১ তম সংখ্যাত প্ৰকাশ পাইছিল। গণিতৰ বিভিন্ন ক্ষেত্ৰত শ্ৰীনিৱাস ৰামানুজনে যি অভিনৱ অৱদান আগবঢ়াইছিল সেইসমূহে আজিও গণিতজ্ঞসকলক সেই ক্ষেত্ৰসমূহত কাম কৰিবলৈ অনুপ্ৰাণিত কৰে। The Ramanujan Journalত ৰামানুজনৰ দ্বাৰা প্ৰভাৱিত গণিতৰ সকলো ক্ষেত্ৰৰে সৰ্বোচ্চ মানৰ গৱেষণা-পত্ৰ প্ৰকাশ কৰা হয়। মোৰ এই গৱেষণা-পত্ৰখন হৈছে তেজপুৰ বিশ্ববিদ্যালয়ৰ গণিত-বিজ্ঞান বিভাগৰ অধ্যাপক আৰু মোৰ ডক্টৰেট ডিগ্ৰীৰ তত্বাৱধায়ক প্ৰফেছৰ নয়নদীপ ডেকা বৰুৱাদেৱৰ সৈতে এক যুটীয়া কাম। আমি কৰা কামখিনিৰ এক চমু অৱলোকন ইয়াত আগবঢ়াইছোঁ:

"q-series"ক এনেদৰে চিহ্নিত আৰু সংজ্ঞায়িত কৰা হয়:

$$\begin{aligned}(a;q)_0 &:= 1,\\ (a;q)_n &:= \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k), \quad n\geq 1,\\ (a;q)_\infty &:= \lim_{n\to\infty}(a;q)_n, \quad |q|<1.\end{aligned}$$

এইখিনিতে, যিকোনো ধণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা j ৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰা হ'ল: $E_j := (q^j;q^j)_\infty$.

"ৰামানুজনৰ হেৰোৱা টোকাবহী"ৰ ৩ নং পৃষ্ঠাত তেওঁ Appell–Lerch sum ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়ে:

$$\phi(q) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q)_{2n}q^{n+1}}{(q;q^2)_{n+1}^2}.$$

ধৰি লোৱা হ'ল যে $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n := \phi(q)$. এই $a(n)$ ৰ বাবে কেইবাটাও অনুৰূপতা (congruence) ২০১২ চনত S. H. Chan নামৰ গণিতজ্ঞজনে প্ৰমাণ কৰে। বিশেষকৈ তেওঁ প্ৰমাণ কৰে যে

$$a(10n+9)\equiv 0 \pmod 5,$$

আৰু অনুমান আগবঢ়ায় যে যিকোনো অঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n ৰ বাবে

$$a(50n+19)\equiv a(50n+39)\equiv a(50n+49)\equiv 0 \pmod{25}.$$

আমি $a(10n+9)$ ৰ বাবে নিম্নলিখিত প্ৰকাশ ৰাশিটো উলিয়াব পৰিলোঁ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(10n+9)q^n = 5\Big(46\frac{E_5E_{10}^2}{E_2^2} + 460q\frac{E_{10}^5}{E_1^3E_2} + 1125q^2\frac{E_{10}^8}{E_1^6E_5} + 1875q\frac{E_2^8E_5^9}{E_1^{16}} + 15625q^2\frac{E_2^8E_5^{15}}{E_1^{22}}\Big).$$

ইয়াৰ দ্বাৰা সহজেই ওপৰত প্ৰথমে উল্লেখ কৰা অনুৰূপতাটো প্ৰমাণ হৈ পৰে। আমি ইয়াৰ দ্বাৰা ওপৰত উল্লেখ কৰা অনুমানটোও প্ৰমাণ কৰি দেখুৱাওঁ। তাৰোপৰি আমি নিম্নলিখিত নতুন অনুৰূপতাটো প্ৰমাণ কৰিবলৈ সক্ষম হওঁ:

$$a(1250n+250r+219) \equiv 0 \pmod{125}, \quad r = 1, 3, 4.$$

S. H. Chanএ ϕ ৰ দৰে আন কিছুমান ফলন অধ্যয়ন কৰে আৰু সেইবোৰৰ কাৰণে কিছুমান অনুৰূপতা বিচাৰি পায়। বিশেষকৈ, যিকোনো দুটা পূৰ্ণ সংখ্যা $p \geq 2, 1 \leq j \leq p-1$, আৰু $(p,j)=1$ ধৰি লৈ তেওঁ এনেদৰে এটি Appell–Lerch sum চিহ্নিত কৰে:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{j,p}(n)q^n = \frac{1}{(q^j;q^p)_\infty(q^{p-j};q^p)_\infty(q^p;q^p)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{pn(n+1)/2+jn+j}}{1-q^{pn+j}}.$$

আৰু তেওঁ প্ৰমাণ কৰে যে

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{j,p}(pn+(p-j)j)q^n = p\ \frac{E_p^4}{E_1^3(q^j;q^p)_\infty^2(q^{p-j};q^p)_\infty^2}$$

যাৰ পৰা আমি অতি সহজে লিখিব পাৰোঁ যে

$$a_{j,p}(pn+(p-j)j) \equiv 0 \pmod{p}.$$

এয়া লক্ষ্য কৰিব লাগিব যে $2a(n) = a_{1,2}(n)$. তেওঁ নিম্নলিখিত অনুৰূপতাকেইটা অনুমান কৰে:

$$\begin{aligned}
a_{1,6}(2n) &\equiv 0 \pmod{2},\\
a_{1,10}(2n) &\equiv a_{3,10}(2n) \equiv 0 \pmod{2},\\
a_{1,6}(6n+3) &\equiv 0 \pmod{3},\\
a_{1,3}(5n+3) &\equiv a_{1,3}(5n+4) \equiv 0 \pmod{5},\\
a_{1,10}(10n+5) &\equiv 0 \pmod{5},\\
a_{3,10}(10n+5) &\equiv 0 \pmod{5}.
\end{aligned}$$

পূৰ্বতে তিনিজন গণিতজ্ঞই মিলি ইয়াৰ প্ৰথম তিনিটা অনুমান প্ৰমাণ কৰিবলৈ সক্ষম হয়। ইয়াৰ চতুৰ্থটো আন দুজন গণিতজ্ঞৰ দ্বাৰা প্ৰমাণিত হয়। আমাৰ গৱেষণা-পত্ৰখনত আমি বাকী থকা অনুমান দুটা প্ৰমাণ কৰোঁ।

গৱেষণা-পত্ৰখনৰ ঠিকনা: DOI: 10.1007/s11139-018-0076-x