i ৰ বাটেৰে ভ্ৰমণ

প্ৰাঞ্জল তালুকদাৰ

প্ৰাক্তন ছাত্ৰ, গণিতবিজ্ঞান বিভাগ, তেজপুৰ বিশ্ববিদ্যালয়

i ৰ কথা আমি সকলোৱে কম-বেছি পৰিমাণে জানো। i ৰ সৈতে আমাৰ পৰিচয় উচ্চ মাধ্যমিক শ্ৰেণীৰ উচ্চ গণিতৰ পাঠ্যক্ৰম বা উচ্চতৰ মাধ্যমিক শ্ৰেণীৰ গণিতৰ পাঠ্যক্ৰমৰ পৰা। বাস্তৱ সংখ্যাৰ সৈতে i ৰ সংলগ্নকৰণৰ দ্বাৰা আমি লাভ কৰোঁ এবিধ নতুন সংখ্যা, জটিল সংখ্যা। i ৰ অবিহনে হয়তো সম্ভৱ নহ'লহেঁতেন আধুনিক গণিতৰ বহু গুৰুত্বপূৰ্ণ সৃষ্টি। i সম্পৰ্কে আমাক দিয়া প্ৰথম পাঠত কোৱা হয় যে কিছুমান দ্বিঘাত সমীকৰণৰ বাস্তৱ সমাধান নাই। যেনে: $x^২ = -c$, য'ত c এটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা। ইয়াৰে আটাইতকৈ সহজ উদাহৰণ হিচাপে আমাক দিয়া হয় $x^২ + ১ = ০$ বা $x^২ = -১$ আৰু কোৱা হয় যে এই সমীকৰণটোৰেই সমাধান হ'ল $x = i$, অৰ্থাৎ $i^২ = -১$।

কিছুদিন আগতে ৱেছলিয়েন বিশ্ববিদ্যালয়ৰ (Wesleyan University) অধ্যাপিকা পেট্ৰা বানফৰ্ট-টেইলৰৰ (Petra Bonfert-Taylor) 'History of Complex Numbers' শীৰ্ষক ভিডিঅ' এটা চাইছিলোঁ। তেওঁ কৈছে যে যদিহে আমি ঐতিহাসিক দৃষ্টিভংগীৰ পৰা বিষয়টো চাবলৈ যাওঁ তেন্তে $x^২ = -১$ প্ৰভৃতি দ্বিঘাত সমীকৰণৰ পৰা গণিতজগতলৈ i ৰ ধাৰণাৰ আগমন হোৱা নাছিল। আমি জানো, $x^২ = mx + c$ আদি সমীকৰণ সমাধানৰ কাৰণে এটা পদ্ধতি আছে, যিটোৰ বিষয়ে আমাক উচ্চ মাধ্যমিক পৰ্য্যায়তেই শিকোৱা হয়। উপৰোক্ত সমীকৰণৰ সমাধানকেইটা আমি $y = x^২$ বক্ৰ আৰু $y = mx + c$ ৰেখাডালৰ ছেদবিন্দু ৰূপেও চাব পাৰোঁ। সমীকৰণৰ সমাধান বুলি ক'লে সেইসময়ত ৰেখা বা বক্ৰৰ ছেদ বিন্দু (point of intersection) বা উমৈহতীয়া বিন্দুকহে (common point) বুজা গৈছিল। আৰু ঐতিহাসিকভাৱে দ্বিঘাত সমীকৰণৰ অবাস্তৱ (non real) সমাধানত কোনো আগ্ৰহ নাছিল, কাৰণ সেইবোৰ সমীকৰণৰ কাৰণে এই বক্ৰ আৰু ৰেখা দুডালে কটাকটি নকৰে। উদাহৰণস্বৰূপে, $x^২ = -১$ ৰ কথাকেই ল'লে দেখিম যে $y = x^২$ বক্ৰ আৰু $y = -১$ ৰেখাই ক'তো ছেদ নকৰে। কাৰণ, $y = x^২$ হ'ল এটি অধিবৃত্ত (parabola), যাৰ কোনো অংশ x-অক্ষৰ তলফালে নাই। আৰু $y = -১$ হ'ল x-অক্ষৰ সমান্তৰাল এডাল ৰেখা যি x-অক্ষৰ এক একক তলত আছে। যিহেতু এই বক্ৰ আৰু ৰেখাডালে কটাকটি নকৰে, গতিকে ভবা হৈছিল যে $x^২ = -১$ ৰ কোনো সমাধান নাই। সেয়েহে, এই সমীকৰণৰ এটা 'জটিল সমাধান' (complex solution) তৈয়াৰ কৰাত বা অবাস্তৱ সমাধান বিচৰাত ঐতিহাসিকভাৱে কোনো আগ্ৰহ নাছিল। তেওঁ কৈছে যে জটিল সংখ্যা বা i-য়ে গুৰুত্ব পোৱাৰ প্ৰধান কাৰণটো আছিল ত্ৰিঘাত (cubic) সমীকৰণবোৰ।

এইখিনিতে কেইটামান গুৰুত্বপূৰ্ণ কথা উনুকিয়াব বিচাৰিছোঁ। বিখ্যাত আৰবীয় গণিতজ্ঞ আল-খোৱাৰিজমিয়ে (Al-Khwarizmi) তেওঁৰ বীজগণিতৰ কিতাপত বিভিন্ন ধৰণৰ দ্বিঘাত সমীকৰণৰ সমাধানৰ কথা লিপিবদ্ধ কৰিছিল, খুব সম্ভৱ পোনপ্ৰথমবাৰৰ বাবে। ইয়াৰে প্ৰমাণসমূহ আছিল জ্যামিতিৰ ওপৰত আধাৰিত। প্ৰাচীন গ্ৰীক আৰু হিন্দু গণিত-শাস্ত্ৰসমূহক ইয়াৰ উৎস বুলি ধাৰণা কৰা হয়। আৰৱসকলে জনা এই পদ্ধতি কালক্ৰমত ইটালীত পৰিচিত হয় আল-খোৱাৰিজমিৰ কিতাপৰ জেৰৰ্ড অফ ক্ৰেমোনাই (Gerard of Cremona) কৰা লেটিন অনুবাদৰ ফলত, আৰু পাছলৈ ফিব'নাচ্চিৰ (Leonardo de Pisa বা Fibonacci) গাণিতিক কৰ্মৰ ফলত।

আনহাতে, ১৪ শতিকাৰ শেষৰ ভাগত গণিত-জগতলৈ চলক সলনি প্ৰক্ৰিয়াই (change of variable) ভুমুকি মাৰিছিল। এই

প্ৰক্ৰিয়া ব্যৱহাৰ কৰি যিকোনো সাধাৰণ ত্ৰিঘাত সমীকৰণ এটাক, যেনে $x^৩ + ax^২ + bx + c = ০$ ক $x^৩ + px + q = ০$ ৰূপলৈ সৰলীকৃত কৰিব পাৰি। এতিয়া, যদি $x^৩ = px + q$ প্ৰভৃতি সমীকৰণৰ কথা ধৰা হয়, তেন্তে ইয়াৰ সমাধানবোৰ হ'ব $y = x^৩$ বক্ৰ আৰু $y = px + q$ ৰেখাৰ ছেদবিন্দু। আৰু যিহেতু $y = x^৩$ বক্ৰৰ বিন্দুবোৰৰ y স্থানাংক ঋণাত্মক অসীমৰ (minus infinity) পৰা ধনাত্মক অসীমলৈকে (plus infinity) বিস্তৃত, গতিকে যিকোনো $y = px + q$ ৰেখাই এই বক্ৰটিক ছেদ কৰিবই। অৰ্থাৎ, $x^৩ = px + q$ ৰ এটা হ'লেও বাস্তৱ সমাধান সদায় পোৱা যাব।

এনেকুৱা সৰলীকৃত ত্ৰিঘাত সমীকৰণসমূহ সমাধান কৰা প্ৰথমগৰাকী ব্যক্তি আছিল বল'নিয়া বিশ্ববিদ্যালয়ৰ (University of Bologna) অধ্যাপক চিপিঅনি ডেল ফেৰ' (Scipione del Ferro)। ডেল ফেৰ'ৰ ছাত্ৰ এণ্ট'নিঅ' মাৰিয়া ফিঅ'ৰিৰ (Antonio Maria Fiore) পৰা লাভ কৰা এক প্ৰত্যাহ্বানৰ ফলস্বৰূপে গণিতজ্ঞ নিকল' ফণ্টানা টাৰ্টেলিয়াই (Niccolo Fontana Tartaglia) এই সূত্ৰটো পুনৰাৱিষ্কাৰ কৰে, আৰু তেওঁ কেৱল সূত্ৰটোৰ বিষয়ে (প্ৰমাণটোৰ অবিহনে) জিৰ'লামো কাৰ্ডানোক (Gerolamo Cardano) জনায়। পাছৰ কালত কাৰ্ডানোৱে প্ৰমাণটো পুনৰগঠন কৰে। কাৰ্ডানোৱে নিজৰ কিতাপ 'Ars Magna'ত এই সূত্ৰটো প্ৰকাশ কৰে। সূত্ৰটো অনুসৰি $x^৩ = px + q$ সমীকৰণৰ সমাধান হ'ল:

$$x = \sqrt[৩]{\frac{q}{২} + w} + \sqrt[৩]{\frac{q}{২} - w},$$

য'ত $w = \sqrt{\frac{q^২}{৪} - \frac{p^৩}{২৭}}$।

কিছুমান সমীকৰণৰ কাৰণে w প্ৰকাশ-ৰাশিটোৰ বৰ্গমূলৰ ভিতৰত থকা ৰাশিখিনিৰ মান ঋণাত্মক আছিল, সেই ঘটনাটোক কোৱা হৈছিল 'casus irreducibilis'. অৱশ্যে কাৰ্ডানোৱে 'Ars Magna'ত এই casus irreducibilisৰ বিষয়ে কোনো আলোচনা কৰা নাছিল। 'A History of Algebra'ৰ লেখক ভেন ডাৰ ৱাৰ্ডেনে (B. L. van der Waerden) কৈছে, "Cardano was the first to introduce complex numbers $a+\sqrt{-b}$ into algebra, but had misgivings about it."

কিছু বছৰ পাছত ইটালীৰ গণিতজ্ঞ ৰাফায়েল ব'ম্বেলিয়ে (Rafael Bombelli) নিজৰ কিতাপ 'L'Algebra'ত $\sqrt{-১}$ ৰ কাৰণে এটা চিহ্ন (notation) সংযোজন (introduce) কৰে আৰু ইয়াক নাম দিয়ে 'piú de meno'. ইতিমধ্যে কাৰ্ডানোৱে আগবঢ়াই থোৱা ত্ৰিঘাত সমীকৰণ সম্পৰ্কীয় আলোচনাখিনিৰ উপৰি L'Algebraত casus irreducibilis সম্পৰ্কে বিশদভাৱে আলোচনা কৰা হৈছিল। ব'ম্বেলিয়ে $x^৩ = ১৫x + ৪$ সমীকৰণটো সমাধান কৰিবলৈ লৈ দেখিলে যে কাৰ্ডানোৰ সূত্ৰ অনুসৰি এই সমীকৰণটোৰ সমাধান হ'ব:

$$x = \sqrt[৩]{২ + \sqrt{-১২১}} + \sqrt[৩]{২ - \sqrt{-১২১}}$$

অন্যহাতে, পৰ্য্যবেক্ষণৰ পৰা তেওঁ জানিছিল যে $x = ৪$ হ'ব ওপৰৰ সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান। ব'ম্বেলিয়ে $\sqrt{-১}$ ক এটা সাধাৰণ সংখ্যা বুলি ধৰি লৈ গণনাখিনি কৰিলে আৰু ঘনমূল ইত্যাদি লোৱাৰ পিছত তেওঁ পালে যে

$$x = (২ + \sqrt{-১}) + (২ - \sqrt{-১}) = ৪$$

এইখিনিৰ পাছত ব'ম্বেলিয়ে মন্তব্য কৰিছিল, "At first, the thing seemed to me to be based more on sophism than on truth, but I searched until I found the proof."

এয়া আছিল i ৰ প্ৰথম দৰ্শন (appearance) আৰু জটিল বিশ্লেষণৰ (Complex Analysis) আৰম্ভণি।

অৱশ্যে কাল্পনিক সংখ্যাৰ (imaginary number) ইতিহাসৰ বাবে ইয়াৰ পাছৰ কিছু ঘটনাও উল্লেখযোগ্য। দাৰ্শনিক, গণিতজ্ঞ ৰেণে ডেকাৰ্টে (René Descartes) নিজৰ কিতাপ 'La Géométrie'ত, য'ত তেওঁ আলোচনা কৰিছিল জ্যামিতিত বীজগণিতৰ ব্যৱহাৰৰ (application) বিষয়ে (যাক আমি বৰ্তমান Cartesian geometry বুলি জানো), সেই কিতাপত তেওঁ কাল্পনিক সংখ্যাবোৰক geometric impossibility ৰ সৈতে সংযুক্ত (associate) কৰিছিল। তাৰোপৰি ডেকাৰ্টে কৈছিল, "For any equation one can imagine as many roots [as its degree would suggest], but in many cases no quantity exists which corresponds to what one imagines." ইয়াৰ পিছত গণিতজ্ঞ জন ৱালিছে (John Wallis) $\sqrt{-১}$ ৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিয়াৰ পথত কিছু কাম কৰিছিল। ইয়াৰ পিছত আহে বিখ্যাত ডি মইভাৰ (de Moivre) উপপাদ্য:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

ছাৰ আইজাক নিউটনে এই সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰি কাৰ্ডানোৰ সূত্ৰত উপস্থিত ঘনমূলৰ মান নিৰ্ণয় কৰিছিল, যেতিয়া ঘনমূলটো

irreducible আছিল। অৱশ্যে গণিতজ্ঞ অয়লাৰেহে সৰ্বপ্ৰথম $i = \sqrt{-১}$ চিহ্ন ব্যৱহাৰ কৰিছিল আৰু জটিল সংখ্যাসমূহক আয়তীয় স্থানাংকৰ একো-একোটা বিন্দু হিচাপে কল্পনা কৰিছিল। কিন্তু ইয়াৰে সন্তোষজনক ভেঁটি প্ৰতিষ্ঠা কৰিব পৰা নাছিল। জটিল সংখ্যাৰ উপস্থাপন সম্পৰ্কীয় প্ৰথমখন গৱেষণা-পত্ৰ আছিল ১৭৯৭ চনৰ ১০ মাৰ্চত কাছপাৰ ৱেছেলে (Caspar Wessel) Royal Danish Academy of Sciences ত মূল ডেনিছ ভাষাত উত্থাপন কৰা 'On the Analytic Representation of Direction: An Attempt'. আজি আমি যাক ভেক্টৰ (vector) বুলি কওঁ, ৱেছেলৰ ধাৰণা সেয়াই আছিল। অকাডেমিখনৰ সদস্য নোহোৱা কোনো ব্যক্তিৰ দ্বাৰা লিখিত সেইখন প্ৰথম গৱেষণা-পত্ৰ আছিল, যিখন প্ৰকাশৰ বাবে বাছনি হৈছিল। ইয়াৰ পৰাই বুজিব পাৰি তেওঁৰ গৱেষণা-পত্ৰখনৰ মান কিমান উন্নত আছিল! এই ক্ষেত্ৰত আন এক গুৰুত্বপূৰ্ণ কাম আছিল পেৰিছৰ এজন কিতাপৰ দোকানী জঁ-ৰবাৰ্ট আৰ্গণ্ডৰ (Jean-Robert Argand) মূল ফৰাচী ভাষাৰ 'Essay on the Geometrical Interpretation of Imaginary Quantities'. তেওঁৰ গণিতৰ শিক্ষা বা প্ৰশিক্ষণৰ বিষয়ে বিতং তথ্য পোৱা নাযায়। ১৮০৬ চনত তেওঁ ব্যক্তিগতভাৱে প্ৰকাশ কৰা এই গৱেষণা-পত্ৰখনৰ এটা কপি কেনেবাকৈ গৈ গণিতজ্ঞ লিজেণ্ড্ৰৰ (Adrien-Marie Legendre) হাতত পৰে, আৰু তেওঁ চিঠিৰ যোগেদি এই কথাখিনি গণিতৰ অধ্যাপক Francois Francaisৰ আগত ব্যক্ত কৰে। তেওঁৰ মৃত্যুৰ পাছত আৰ্গণ্ডৰ গৱেষণা-পত্ৰ আৰু চিঠিসমূহ ভাতৃ Jaques ৰ হাতলৈ যায়। অৱশ্যে আৰ্গণ্ডে 'Essay on the Geometrical Interpretation of Imaginary Quantities' ৰ প্ৰথম পৃষ্ঠাত নিজৰ নামটো সন্নিবিষ্ট কৰা নাছিল। Jaques য়ে ১৮১৩ চনত ফৰাচী গৱেষণা-পত্ৰিকা Annales de Mathémathiques ত জটিল সংখ্যাৰ মৌলিক ধাৰণা (basic concept) সম্পৰ্কে এটা প্ৰবন্ধ প্ৰকাশ কৰে। প্ৰবন্ধটোৰ শেষৰ দফাটোত তেওঁ লিজেণ্ড্ৰৰ চিঠিসমূহৰ ঋণ স্বীকাৰ কৰে আৰু প্ৰকৃত লেখকজনক নিজৰ পৰিচয় দাঙি ধৰিবলৈ অনুৰোধ কৰে। আৰ্গণ্ডে এইবিষয়ে গম পায় আৰু গৱেষণা-পত্ৰিকাখনৰ পৰৱৰ্তী সংখ্যাত এই সম্পৰ্কে আৰ্গণ্ডৰ উত্তৰ প্ৰকাশ পায়। ইয়াৰ পাছত আইৰিছ গণিতজ্ঞ হেমিল্টনে (William Rowan Hamilton) বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ৰমিক যোৰ (ordered pair) কিছুমানক couple বুলি সংজ্ঞায়িত কৰে আৰু এই couple বিলাকৰ যোগ আৰু পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াক তেওঁ সংজ্ঞাবদ্ধ কৰে এনেদৰে:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

আৰু $(a, b)(c, d) = (ac\text{-}bd, bc + ad).$

এয়াই আছিল জটিল সংখ্যাসমূহৰ বীজগণিতীয় সংজ্ঞা।

অৱশ্যে গণিতত 'জটিল সংখ্যা' এই নামটো প্ৰথম সংযোজন কৰে গাউছে (Carl Friedrich Gauss)। পৰৱৰ্তী সময়ত ক'চিয়ে (Augustin-Louis Cauchy) ১৮১৪ চনত complex function theory ৰ আৰম্ভণি কৰে আৰু ১৮৪৭ চনত ring theory ব্যৱহাৰ কৰি নতুন ধৰণে জটিল সংখ্যাৰ সংহতি (set of complex numbers) গঠন কৰে। অৱশ্যে কাহিনীৰ শেষ ইয়াতেই নহয়। ইয়াৰ পিছতো জটিল সংখ্যাৰ তত্ত্ব নতুন নতুন দ্ৰষ্টা আৰু স্ৰষ্টাৰ আলোকেৰে উদ্ভাসিত হৈ উঠিছে। মানুহৰ যুক্তি আৰু জিজ্ঞাসাৰ পৰিপ্ৰেক্ষিতত গণিতশাস্ত্ৰত এটা নতুন পাঠৰ আৰম্ভণি কৰা i ৰ বাটেৰে এয়া আছিল আমাৰ এক অতিশয় চমু ভ্ৰমণ।

"মই প্ৰয়োগৰ খাতিৰত গণিতত সঁচাকৈয়ে আগ্ৰহী নহয়। গণিতত মোক যিয়ে আগ্ৰহী কৰে সেইটো হৈছে গণিত। যদিহে ই বাস্তৱ পৃথিৱীৰ কিবা এটা ভালদৰে বুজিবলৈ সহায় কৰে, তেন্তে এয়া বৰ ভাল কথা। কিন্তু মই গণিতৰ কোনো অংশ আয়ত্ব কৰি অতি আনন্দিত হওঁ স্বয়ং তাৰ পৰাই।"

— মাৰ্টিন হেইৰৰ

২০১৪ চনত ফিল্ডছ্ মেডেল বিজয়ী গণিতজ্ঞ