গড়বেগৰ সমস্যাটো

প্ৰাচুৰ্য প্ৰাণ হাজৰিকা

গৱেষক ছাত্ৰ, পদাৰ্থবিজ্ঞান বিভাগ, ভাৰতীয় বিজ্ঞান শিক্ষা আৰু গৱেষণা প্ৰতিষ্ঠান (IISER), পুণে

কলেজত পঢ়ি থাকোতেই এটা মনোগ্ৰাহী প্ৰশ্ন মনলৈ আহিছিল। প্ৰশ্নটো তেনেই সাধাৰণ, উচ্চতৰ মাধ্যমিক পৰ্য্যায়ৰ। কিন্তু উচ্চতৰ মাধ্যমিক পৰ্য্যায়ৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীক সহজে বুজাবলৈ প্ৰশ্নটোৰ সন্তোষজনক উত্তৰ এটা স্নাতকোত্তৰ পৰ্যায়ত পঢ়ি থাকোঁতেহে ভাবি পাইছিলোঁ। **সেই প্ৰশ্নটোৰ উত্তৰ দিবলৈ যাওঁতে এজন গণিতজ্ঞ আৰু এজন পদাৰ্থবিজ্ঞানীৰ দৃষ্টিভংগীৰ পাৰ্থক্যখিনি অলপ মন কৰিব পাৰি।** সেয়েহে এই কথাখিনি ক'বলৈ লৈছোঁ। উচ্চতৰ মাধ্যমিক পৰ্য্যায়ৰ পদাৰ্থ বিজ্ঞানৰ প্ৰথম বা দ্বিতীয় অধ্যায়টোতেই গতিবেগ (velocity), দ্ৰুতি (speed), গড়বেগ (average velocity), তাৎক্ষণিক বেগ (instantaneous velocity) আদিৰ গাণিতিক সংজ্ঞা দিয়া হয়, আৰু কলন গণিতৰ চমু আভাষ দিয়া হয়। মোৰ সমস্যাটো আছিল গড়বেগ নিৰ্ণয়ৰ লগত জড়িত। সমস্যাটোক সহজকৈ উপস্থাপন কৰিবলৈ কেৱল এটা দিশত গতিৰ কথা আলোচনা কৰা যাওক, যাতে বেগ আৰু দ্ৰুতিৰ অৰ্থ একেই হৈ পৰে। গাণিতিক ভাষাত, কেইটামান সংখ্যাৰ গড় নিৰ্ণয় কৰা হয় সংখ্যাকেইটাৰ যোগফলৰ পৰা। উদাহৰণ স্বৰূপে, n টা সংখ্যা: $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ৰ গড় মান (average)ক তলত দিয়াৰ ধৰণে প্ৰকাশ কৰা হয়।

$$n_{\text{avg}} = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n}. \tag{1}$$

কিন্তু গড়বেগ নিৰ্ণয় কৰাৰ পদ্ধতিটো একেবাৰে বেলেগ। ধৰা হওক এখন গাড়ী এটা বিন্দু Aৰ পৰা আন এটা বিন্দু Bলৈ সৰলৰৈখিকভাৱে গতি কৰিছে। গোটেই যাত্ৰাটোৰ মুঠ দৈৰ্ঘ্য S আৰু মুঠ প্ৰয়োজনীয় সময় T হ'লে, S/T সংখ্যাটোক গড়বেগ বুলি কোৱা হয়। পিছে সেয়া প্ৰকৃততেই সেই গাণিতিক সংজ্ঞাৰ গড় হয়নে? সেয়া বুজিবলৈ আমি AB দৈৰ্ঘ্যটোক n টা অসমান ভাগত ভাগ কৰি লৈ প্ৰতিটো ভাগৰ 'গড়'বেগ হিচাপ কৰি ল'ব পাৰোঁ। n তম ভাগটোৰ দৈৰ্ঘ্য s_n আৰু সেই দৈৰ্ঘ্য অতিক্ৰম কৰিবলৈ প্ৰয়োজনীয় সময় t_n হ'লে, সেই অংশটোত গাড়ীখনৰ গতিবেগ হ'ব $v_n = s_n/t_n$। গাণিতিক সংজ্ঞাৰ মতে, গোটেই বাটটোৰ বাবে গড়বেগৰ মান হ'ব লাগিছিল এই প্ৰতিটো v_nৰ যোগফলক nৰে হৰণ কৰি পাবলগীয়া সংখ্যাটো। অৰ্থাৎ,

$$v^*_{\text{avg}} = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n}. \tag{2}$$

কিন্তু প্ৰকৃততে কিতাপ মেলি চালে দেখা যায় যে এই সূত্ৰটোৱে আমাক ভুল উত্তৰ দিয়ে। পদাৰ্থবিজ্ঞানত গড়বেগক (মুঠ দূৰত্ব)/(মুঠ সময়) হিচাপেহে প্ৰকাশ কৰা হয়। অৰ্থাৎ,

$$v_{\text{avg}} = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{t_1 + t_2 + \cdots + t_n} = \frac{S}{T}. \tag{3}$$

AB দূৰত্বক ভাগ কৰাৰ আগলৈকে (2) আৰু (3) এই দুয়োটা সমীকৰণেই আমাক একেটা উত্তৰ দিছিল: S/T। কিন্তু দূৰত্বটোক n ভাগত ভাগ কৰাৰ পিছত দেখা গ'ল যে গড়ৰ গাণিতিক সংজ্ঞাটোৱে আমাক এটা ভুল উত্তৰ দিয়ে। আমি সদায় ব্যৱহাৰ কৰি অহা (3) সমীকৰণটো সঁচা বুলি আমি ধৰি লওঁ, আৰু এই বিষয়ে সাধাৰণতে দকৈ নাভাবোঁ। কিন্তু, আনটো সমীকৰণে কিয় ভুল উত্তৰ দিয়ে, সেয়া বুজাব পৰাকৈ এটা ভাল উদাহৰণ বিচাৰি পোৱা নাছিলোঁ। গাণিতিক সংজ্ঞাৰ পৰা পোৱা সমীকৰণটোৱে নিঃসন্দেহে এটা বেলেগ উত্তৰ দিয়ে, কিয়নো

$$\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{t_1 + t_2 + \cdots + t_n} \neq \frac{1}{n}\left\{\frac{s_1}{t_1} + \frac{s_2}{t_2} + \cdots + \frac{s_n}{t_n}\right\}.$$

কলেজত পঢ়ি থকাৰ সময়ত এই কথাটো মোৰ সহজে হজম হোৱা নাছিল, আৰু এই উত্তৰটোৰ এটা ভৌতিক তাৎপৰ্যতা (physical significance) বিচাৰি উলিওৱাটোৱেই মোৰ বাবে এটা প্ৰত্যাহ্বান আছিল। অৱশেষত এই সমস্যাটোৰ এটা উপযুক্ত সমাধান বিচাৰি পালো শূন্যৰ ব্যৱহাৰৰ জৰিয়তে। ধৰা হওক s_1, s_2 ... এই প্ৰতিটো দূৰত্বৰ অংশৰে বেলেগ বেলেগ গতিবেগেৰে গতি কৰা গাড়ীখনে কোনো এটা বিন্দুত τ সময়ৰ বাবে ৰয়। সেই সময়ছোৱাৰ বাবে গাড়ীখনৰ গতিবেগ কিমান হ'ব? কোনো দূৰত্ব অতিক্ৰম নকৰাকৈ τ সময় পাৰ হৈ গ'লে গতিবেগৰ সূত্ৰ অনুসৰি আমি $v = 0/\tau$ পৰিমাণৰ এটা বেগ (2) নং সমীকৰণটোত যোগ কৰিব লাগিব! অৰ্থাৎ, সেই সমীকৰণটোৰ মতে নতুন গতিবেগ হ'ব:

$$v^*_{\text{avg}} = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n + v}{n+1}. \tag{4}$$

কিন্তু, সমস্যাটো হ'ল, এই সমীকৰণটোত গাড়ীখন কিমান সময় ৰৈ থাকে, আৰু কিমানবাৰ ৰয়, সেই তথ্য সন্নিহিত হৈ থকা নাই; কিয়নো τ ৰ যিকোনো মানৰ বাবে v ৰ মান শূন্য। তদুপৰি গাড়ীখন কেইবাটাও ঠাইত ৰ'লে সমীকৰণটোৰ হৰ(denominator)টোৰ মান বাঢ়ি গৈ থাকিব। কিন্তু গাড়ীখন এডোখৰ ঠাইত ১০ মিনিট ৰওক বা ৫ ঘণ্টা ৰওক, এই সমীকৰণটোৰ পৰা একেটা উত্তৰেই পাম। গতিকে আমি সমস্যাটোৰ বাস্তৱ প্ৰতিচ্ছবি এটা সমীকৰণটোত ফুটাই তুলিবলৈ বিফল হৈছোঁ। সেয়েহে, গাণিতিক সংজ্ঞাৰ মতে এই সমীকৰণটো বিভিন্ন পৰিমাণৰ বেগৰ 'গড়' হ'লেও ইয়াৰ কোনো ভৌতিক তাৎপৰ্য নাই। আনহাতে, আমি যদি আনটো সমীকৰণ (3) লৈ লক্ষ্য কৰোঁ, আমি দেখিম যে ৰৈ থকা অতিৰিক্ত সময়খিনি কেৱল হৰ অংশত যোগ হয়। ইয়াত কোনো শূন্য বা অসীমৰ লগত খেলিমেলিৰ সৃষ্টি নহয়। গাড়ীখন যিমান সময় ৰৈ থাকিব, সিমানখিনি সময় হৰ অংশত যোগ হ'ব আৰু গড়বেগৰ মান সিমানে কম হ'ব। এই সমীকৰণটোৱে বাস্তৱ সমস্যাটোক সফলভাৱে উপস্থাপন কৰিছে, আৰু ইয়াক গণনা কৰিবলৈয়ো অতি সহজ।

সংখ্যা একোটাৰ অংকবোৰৰ যোগফলটো ৩ ৰে হৰণ গ'লে সংখ্যাটোকো ৩ ৰে হৰণ যায়। সেইদৰে, অংকবোৰৰ যোগফলটো ৯ ৰে হৰণ গ'লে সংখ্যাটোকো ৯ ৰে হৰণ যায়।

ইয়াৰ ওলোটা (converse) উক্তি মতে আমি পাওঁ যে সংখ্যা একোটাক ৩ ৰে হৰণ গ'লে তাৰ অংকবোৰৰ যোগফলটোকো ৩ ৰে হৰণ যাব। সেইদৰে, সংখ্যাটোক ৯ ৰে হৰণ গ'লে তাৰ অংকবোৰৰ যোগফলটোকো ৯ ৰে হৰণ যাব। এয়া শুদ্ধ।

কিন্তু, ২৭ আৰু ৮১ ৰ ক্ষেত্ৰত এই কথা সদায় শুদ্ধ নহয়।

- ৩৯৭৮ সংখ্যাটোৰ অংককেইটাৰ যোগফলক ২৭ ৰে হৰণ যায়, কিন্তু ৩৯৭৮ ক ২৭ ৰে হৰণ নাযায়।
- ৫৪ সংখ্যাটোক ২৭ ৰে হৰণ যায়, কিন্তু ইয়াৰ অংককেইটাৰ যোগফল হৈছে ৯ যাক ২৭ ৰে হৰণ নাযায়।
- ১৯৯৮ সংখ্যাটোক ২৭ ৰে হৰণ যায়, আৰু ইয়াৰ অংককেইটাৰ যোগফলকো ২৭ ৰে হৰণ যায়।
- ৮৮৮৮৮৮৮৮৮৮১ ৰ অংককেইটাৰ যোগফল ৮১ যাক ৮১ ৰে হৰণ যায়। কিন্তু ৮৮৮৮৮৮৮৮৮৮১ ক ৮১ ৰে হৰণ নাযায়।
- ২৪৩ সংখ্যাটোক ৮১ ৰে হৰণ যায়। কিন্তু ২৪৩ ৰ অংককেইটাৰ যোগফল হৈছে ৯ যাক ৮১ ৰে হৰণ নাযায়।
- ১১.........১১ হ'ল ৮১ টা ১ ৰে গঠিত সংখ্যা। ইয়াক ৮১ ৰে হৰণ যায়, আৰু ইয়াৰ অংককেইটাৰ যোগফলকো ৮১ ৰে হৰণ যায়।

সংখ্যা এটাৰ এককৰ ঘৰৰ অংকটোক ৮ ৰে পূৰণ কৰি সংখ্যাটোৰ বাকী অংশৰ পৰা পূৰণফলটো বিয়োগ কৰক। বিয়োগফলটো যদি ২৭ ৰে হৰণ যায় তেন্তে সংখ্যাটোৰো ২৭ ৰে হৰণ যাব। আৰু বিয়োগফলটো যদি ৮১ ৰে হৰণ যায় তেন্তে সংখ্যাটোৰো ৮১ ৰে হৰণ যাব। এইকেইটাৰ ওলোটা উক্তিটোৰো সত্য।