গণিতীয় প্ৰ’গ্ৰেমিং

অৰবিন্দ দেৱ মিশ্ৰ

[**সম্পাদকৰ টোকা:** ‘গণিত বিকাশ’ৰ পুৰণি পৃষ্ঠাৰ এই লেখাটো প্ৰধানকৈ দুটা কাৰণত তুলি অনা হৈছে। স্কুল-কলেজৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে যদি লেখাটো পঢ়ে আৰু ইয়াত দিয়া সমস্যাসমূহ যদি তেওঁলোকে নতুনকৈ দেখা পায়, তেন্তে এই সুকীয়া ধৰণৰ সমস্যাসমূহে তেওঁলোকক কৌতুহল যোগাব। আৰু এতিয়াও পাঠ্যক্ৰমত সাল-সলনি হ’ব লগা কিছুমান বিষয়ৰ সম্পৰ্কে মুকলি আলোচনা হোৱাৰ অতি প্ৰয়োজন, লেখাটোৱে সেই দিশতো আগ্ৰহ জন্মাব পাৰে। *(স্পষ্টতাৰ বাবে লেখাটোৰ দুই-এটা বাক্যত অতি সামান্য সম্পাদনা কৰা হৈছে।)*]

গণিতীয় প্ৰ’গ্ৰেমিঙে ইতিমধ্যে পৃথিৱীৰ উন্নত দেশবোৰৰ স্কুলীয়া পাঠ্যক্ৰমত ঠাই পাইছে। ভাৰতলৈ ই অৱশ্যে লাহে লাহে আহিব ধৰিছে। অধ্যাপক জে এন কাপুৰৰ ভাষাত ক’বলৈ হ’লে–

(1) It is an interesting mathematical discipline in its own right;
(2) it has important applications in industry; and
(3) its mathematical level is such that it can be taught in school stage, specially because it can be developed without using calculus.

গণিতৰ এই নতুন শাখাটোনো কি তাৰ এটা ধাৰণা ইয়াত উদাহৰণ দি বুজোৱা হ’ব। সেইবোৰ সমাধান কৰিবলৈ বা সেই সংক্ৰান্তৰ উপপাদ্য আদি প্ৰমাণ কৰিবলৈ চেষ্টা কৰা নহ’ব। গণিতৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰী তথা শিক্ষকসকল আৰু গণিতত ৰাপ থকা ব্যক্তিসকলৰ এই শাখাটোৰ প্ৰতি দৃষ্টি আকৰ্ষণ কৰাই আমাৰ মুখ্য উদ্দেশ্য।

উদাহৰণ ১

ধৰা হ’ল, এখন সমবায়ৰ দুটা মেচিন আছে: ১ নং মেচিন আৰু ২ নং মেচিন। এই দুটা মেচিনত দুবিধ বস্তু A আৰু B তৈয়াৰ কৰিব পাৰি; অৰ্থাৎ প্ৰতিবিধ বস্তু তৈয়াৰ কৰোঁতে দুয়োটা মেচিনকে ব্যৱহাৰ কৰিব লাগে (যেনে, প্ৰথমটোত ধান বনা হয়, আৰু দ্বিতীয়টোত চাউল, মল, তুঁহ আদি পৃথক পৃথক কৰা হয়। আকৌ প্ৰথমটোত গম ভঙা হয়, আৰু দ্বিতীয়টোত আটা আৰু ভূচি পৃথক পৃথক কৰা হয়।) ধৰাহ’ল A বস্তুটোৰ এক কুইণ্টল তৈয়াৰ কৰোঁতে ১ নং মেচিনক এক ঘণ্টা আৰু ২ নং মেচিনক ডেৰ ঘণ্টা সময় লাগে। B বস্তুটোৰ এক কুইণ্টলত ১ নংটোৰ দুই ঘণ্টা আৰু ২ নংটোৰ ১$\frac{১}{8}$ ঘণ্টা সময় লাগে। প্ৰতিটো মেচিন এদিনত ১৬ ঘণ্টাতকৈ বেছি সময় চলাব নোৱাৰি। A বস্তুটো তৈয়াৰ কৰোঁতে লাভ হয় কুইণ্টলত ৫ টকা আৰু B টোত ৮ টকা। এতিয়া প্ৰশ্ন হ’ল, প্ৰতিবিধৰ কিমানকৈ তৈয়াৰ কৰিলে সমবায়ৰ লাভ উচ্চতম হ’ব?

এই প্ৰশ্নটো হয়তো আমাক সমবায়ে দিব। এতিয়া আমি গণিতৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে ইয়াক গণিতীয় ভাষাত নতুনকৈ লিখি উলিয়াব লাগিব।

ধৰা হ’ল, প্ৰথম বিধৰ x কুইণ্টল আৰু দ্বিতীয় বিধৰ y কুইণ্টল প্ৰতিদিনে তৈয়াৰ কৰা হয়। এইখিনি তৈয়াৰ কৰোঁতে,

১ নং মেচিনক সময় লাগিব $x + ২y$ ঘণ্টা।

২ নং মেচিনক সময় লাগিব $\frac{৩}{২}x + \frac{৫}{8}y$ ঘণ্টা।

প্ৰতিদিনে লাভ হ'ব $৫x + ৮y$ টকা।

যিহেতু একোটা মেচিন ১৬ ঘণ্টাতকৈ বেচি সময় চলাব নোৱাৰি, গতিকে $x + ২y \leq ১৬$ আৰু $\frac{৩}{২}x + \frac{৫}{৪}y \leq ১৬$ বা $৬x + ৫y \leq ৬৪$।

আনহাতে, তৈয়াৰী বস্তুৰ পৰিমাণ বিয়োগাত্মক হ'ব নোৱাৰে। গতিকে, $x \geq ০, y \geq ০$। গতিকে উক্ত প্ৰশ্নটোৰ গণিতীয় ৰূপ হ'ব:

$$x + ২y \leq ১৬,$$
$$৬x + ৫y \leq ৬৪,$$
$$\text{আৰু } x \geq ০, y \geq ০,$$

এই তিনিটা সিদ্ধ কৰাকৈ x আৰু y ৰ মান উলিয়াব লাগে যিয়ে $৫x + ৮y$ ৰাশিটোৰ উচ্চতম মান দিব।

বিঃদ্ৰঃ– এই অংকটোত যিহেতু মাত্ৰ দুটাহে চলক x আৰু y আছে, সেয়ে এনেকুৱা গণিতীয় প্ৰ'গ্ৰেমিঙক লৈখিক প্ৰ'গ্ৰেমিং (Linear programming) বোলা হয়। ইচ্ছুক ব্যক্তিয়ে এই প্ৰশ্নটোৰ সমাধান লেখৰ সহায়ত নিৰ্ণয় কৰিবলৈ চেষ্টা কৰিব পাৰে।

উদাহৰণ ২

বুঢ়ী হাঁহ একোজনীৰ দাম দুটকা, কিন্তু এবছৰীয়া হাঁহ একোজনীৰ দাম পাঁচ টকা। বুঢ়ী হাঁহ একোজনীয়ে সপ্তাহত গড়ে চাৰিটাকৈ কণী দিয়ে, আৰু এবছৰীয়াজনীয়ে সপ্তাহত গড়ে ছটাকৈ কণী দিয়ে। একোটা কণীৰ দাম ৩৫ পইছা। একোটা হাঁহৰ সপ্তাহত খুওৱা খৰচ এটকা। এজন মানুহৰ মুঠ ১০০ টকা আছে আৰু ২৫ জনীতকৈ বেছি হাঁহ থ'বৰ ঠাই নাই। তেনেহ'লে কোন বিধৰ কিমানটা হাঁহ কিনিলে তেওঁৰ লাভ সৰ্বোচ্চ হ'ব?

এই প্ৰশ্নটো গণিতীয় ভাষাত লিখিলে এনেকুৱা হ'ব:

ধৰা হ'ল x জনী বুঢ়ী আৰু y জনী এবছৰীয়া হাঁহ কিনা হ'ল। এতিয়া,

(i) মুঠ হাঁহৰ সংখ্যা হ'ল $x + y$ জনী। প্ৰশ্নমতে ২৫ টাতকৈ বেছি হাঁহ ৰখা ঠাই নাই। গতিকে $x + y \leq ২৫$।

(ii) মুঠ কিনা খৰচ $২x + ৫y$ টকা। মানুহজনৰ আছে কিন্তু ১০০ টকাহে। গতিকে $২x + ৫y \leq ১০০$।

(iii) আনহাতে হাঁহৰ সংখ্যা বিয়োগাত্মক হ'ব নোৱাৰে। আনকি হাঁহৰ সংখ্যা ভগ্নাংশও হ'ব নোৱাৰে। গতিকে x, y দুটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

(iv) কণীৰ সংখ্যা $৪x + ৬y$। সপ্তাহত কণী বিক্ৰী কৰি আয় হয় $\frac{৭}{১০}(২x + ৩y)$ টকা। সপ্তাহত হাঁহৰ লগত খৰচ হয় $x + y$ টকা।

$$\begin{aligned} \text{সপ্তাহত লাভ} &= \frac{৭}{১০}(২x + ৩y) - (x + y) \\ &= \frac{৪x + ১১y}{১০} \text{ টকা।} \end{aligned}$$

গতিকে, প্ৰশ্নটো হ'ল:

$x + y \leq ২৫$,

$২x + ৫y \leq ১০০$,

আৰু x, y যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা,

এই তিনিটা সিদ্ধ কৰাকৈ x আৰু y ৰ মান উলিয়াব লাগে যিয়ে $\frac{১}{১০}(৪x + ১১y)$ ৰ উচ্চতম মান দিব।

উদাহৰণ ৩

এটা কোম্পানীৰ দুঠাইত $P_১$ আৰু $P_২$ নামৰ দুটা যন্ত্ৰ আছে (ধৰক গুৱাহাটী আৰু শিলচৰত)। তাত যি বস্তু তৈয়াৰ হয় সেইবোৰ পূৰ্বাঞ্চলৰ ঠায়ে ঠায়ে বিক্ৰী হয়। বস্তুবোৰ যোগান ধৰাৰ কাৰণে $W_১, W_২, W_৩$ নামৰ ঠাইত (ধৰক, গুৱাহাটী, ডিব্ৰুগড়, শ্বিলং) ডাঙৰ ডাঙৰ গুদাম ঘৰ সজা হৈছে। $P_১$ মেচিনৰ উৎপাদন ক্ষমতা দিনে ৪২ একক, $P_২$ ৰ ৩৭ একক। $P_১$ ত এক এককৰ উৎপন্ন খৰচ ১৭ টকা আৰু $P_২$ ত ১৫ টকা। তলত দিয়া তালিকাই যাতায়াত খৰচ বুজাব। অৰ্থাৎ, $P_১$ ৰ পৰা $W_১$ লৈ একো যাতায়াত খৰচ নাই (শূন্য), $P_১$ ৰ পৰা $W_২$ লৈ খৰচ এক এককত এটকাকৈ, $P_২$ ৰ পৰা $W_৩$ লৈ এক এককত খৰচ ৪ টকাকৈ, ইত্যাদি।

পৰা \ প্ৰতি	$W_১$	$W_২$	$W_৩$
$P_১$	০	১	২
$P_২$	১	২	৪

আনহাতে $W_১$ ত ২৫০ একক আৰু $W_২$ ত ৩০০ একক বস্তু লাগিবই। $W_৩$ ত কমেও ১২০ একক লাগিব। এতিয়া কোন ঠাইৰ পৰা কিমান একক ক'লৈ পঠিয়ালে যাতায়াত খৰচ নিম্নতম হ'ব?

গণিতীয় ভাষাত অংকটো এনে ধৰণৰ হ'ব:

ধৰা হ'ল $x_{১২} = P_১$ ত তৈয়াৰ কৰি $W_২$ লৈ যোৱা বস্তুৰ এককৰ সংখ্যা। সেইদৰে $x_{১১}, x_{১৩}, x_{২১}, x_{২২}, x_{২৩}$ আদিৰো অৰ্থ হ'ব। গতিকে, মুঠ খৰচ হ'ব:

$$(১৭x_{১১}+১৮x_{১২}+১৯x_{১৩}+১৬x_{২১}+১৭x_{২২}+১৯x_{২৩}) \text{ টকা।}$$

$P_১$ ৰ পৰা যাব: $x_{১১} + x_{১২} + x_{১৩}$। গতিকে,

$$x_{১১} + x_{১২} + x_{১৩} \leq ৪২। \quad (১)$$

$P_২$ ৰ পৰা যাব: $x_{২১} + x_{২২} + x_{২৩}$। গতিকে,

$$x_{২১} + x_{২২} + x_{২৩} \leq ৩৭। \quad (২)$$

$W_১$ ত লাগিব: $x_{১১} + x_{২১}$। গতিকে,

$$x_{১১} + x_{২১} = ২৫০। \quad (৩)$$

$W_২$ ত লাগিব: $x_{১২} + x_{২২}$। গতিকে,

$$x_{১২} + x_{২২} = ৩০০। \quad (৪)$$

$W_৩$ ত লাগিব: $x_{১৩} + x_{২৩}$। গতিকে,

$$x_{১৩} + x_{২৩} \geq ১২০। \quad (৫)$$

বস্তুৰ সংখ্যা বিয়োগাত্মক হ'ব নোৱাৰে। গতিকে,

$$x_{১১} \geq ০, x_{১২} \geq ০, \ldots, x_{২৩} \geq ০। \quad (৬)$$

গতিকে, আমাৰ প্ৰশ্নটো হ'ল:

(১), (২), (৩), (৪), (৫) আৰু (৬) ক সিদ্ধ কৰাকৈ $x_{১১}, x_{১২}, \ldots, x_{২৩}$ চলক ছটাৰ মান উলিয়াব লাগে যাতে এই মানে,

$$১৭x_{১১} + ১৮x_{১২} + ১৯x_{১৩} + ১৬x_{২১} + ১৭x_{২২} + ১৯x_{২৩}$$

ৰাশিটোৰ নিম্নতম মান দিয়ে।

এই তিনিটা উদাহৰণেৰে আমি গণিতীয় প্ৰ'গ্ৰেমিঙৰ ধাৰণা এটা দিলোঁ। এনেধৰণৰ সহজ প্ৰশ্ন সমাধানৰ বাবে সমীকৰণ আৰু অসমতাৰ জ্ঞান, লেখৰ ধাৰণা, আৰু কিছু স্থানাংক জ্যামিতিৰ ধাৰণাই যথেষ্ট।

সাধাৰণতে এই প্ৰশ্নবোৰক অনুকূলতম সমস্যা (Optimization problems) বোলা হয়। কাৰণ এই প্ৰশ্নবোৰৰ মূল উদ্দেশ্য হ'ল কোনো এটা ৰাশিৰ উচ্চতম বা নিম্নতম মান উলিওৱা। ইয়াৰ প্ৰয়োগ বিজ্ঞানৰ প্ৰায়বোৰ বিষয়তে হোৱাৰ উপৰি অৰ্থনীতি, প্ৰতিৰক্ষা আদিতো ইয়াৰ বহুল ব্যৱহাৰ আছে।

এখন দেশৰ সীমিত সংস্থানৰ (limited resources) মাজত উচ্চতম উৎপাদনৰ লক্ষ্য পূৰাব লাগিলে, কোনো বস্তু আদি তৈয়াৰ কৰোতে নিম্নতম খৰচ কৰিব লাগিলে, সীমিত প্ৰতিৰক্ষা ব্যৱস্থাৰে আত্মৰক্ষা বা আক্ৰমণ কৰিব লাগিলে গণিতীয় প্ৰ'গ্ৰেমিঙৰ সহায় অপৰিহাৰ্য্য।

গণিতীয় প্ৰ'গ্ৰেমিঙৰ মূল্য যে অকল ব্যাৱহাৰিক দিশতে আছে এনে নহয়; ই নিজেই এটা গঠনাত্মক সৌন্দৰ্যপূৰ্ণ (full of structural beauties) বিষয়। এই শাখাৰ উপপাদ্য, সিদ্ধান্ত আৰু প্ৰশ্ন সমাধানৰ নিয়মাৱলী চমকপ্ৰদ। প্ৰায় পয়ত্ৰিছ বছৰ বয়সীয়া এই বিষয়টোৱে এতিয়া পৃথিৱীৰ সকলো ঠাইতে সমাদৰ লাভ কৰিছে।

"মোৰ কোনো সামগ্ৰিক লক্ষ্য নাই, কিন্তু যেতিয়া মই এটা (গাণিতিক) সমস্যাৰ প্ৰতি আগ্ৰহী হওঁ মই ইয়াক সমাধান কৰাতকৈ অধিক কৰিব বিচাৰো; মই সঁচাকৈয়ে বুজিব বিচাৰো কি হৈ আছে আৰু অধিক আগলৈ আগবাঢ়িবলৈ সমাধানটো ব্যৱহাৰ কৰাত সক্ষম হ'ব বিচাৰোঁ।"

– ৰিচাৰ্ড পি. ষ্টেনলি

(দুটা খণ্ডত প্ৰকাশিত 'Enumerative Combinatorics' শীৰ্ষক গ্ৰন্থখনৰ বাবে বিখ্যাত গণিতজ্ঞ, MIT ৰ প্ৰাক্তন অধ্যাপক। এতিয়াও গৱেষণাৰত ৭৭ বছৰ বয়সীয়া গণিতজ্ঞগৰাকীয়ে এয়া যোৱা বছৰ কোৱা কথা।)