নিখুঁত সংখ্যাৰ জগতত এভুমুকি

ঋতু দত্ত

গৱেষক ছাত্ৰ, গণিত বিভাগ, ডিব্ৰুগড় বিশ্ববিদ্যালয়

সংখ্যাতত্ত্বত বহুলভাৱে অধ্যয়ন কৰা এবিধ সংখ্যা হ'ল নিখুঁত সংখ্যা বা নিপোটল সংখ্যা (perfect number)। ইয়াৰ বিষয়ে অধ্যয়ন প্ৰথমে কেতিয়া হৈছিল সেয়া সঠিককৈ জনা নাযায়। তথাপি এই কথা ক'ব পাৰি যে সংখ্যা সম্বন্ধে মানুহৰ কৌতুহল যেতিয়াৰ পৰাই আৰম্ভ হ'ল ঠিক তেনে সময়তেই নিখুঁত সংখ্যা বা অন্য সংখ্যা কিছুমানৰ অধ্যয়নো আৰম্ভ হয়। বহুতে ধাৰণা কৰে যে প্ৰাচীন ইজিপ্তীয়সকলে এই সংখ্যাবোৰৰ বিষয়ে কিছু জানিছিল। বিশেষকৈ তেওঁলোকে ব্যৱহাৰ কৰা গণনা পদ্ধতিৰ যোগেদি। এই সংখ্যাবোৰ পাইথাগোৰাছ (Pythagoras) আৰু তেওঁ শিষ্যসকলেও অধ্যয়ন কৰা কথা জানিব পৰা যায়। পাইথাগোৰীয়সকলে নিখুঁত সংখ্যাবোৰ অধ্যয়ন কৰিছিল বিশেষকৈ ইয়াৰ ৰহস্যময় বৈশিষ্ট্যবোৰৰ বাবে। নিখুঁত সংখ্যাৰ ক্ৰমবিকাশৰ বিষয়ে আৰু কিছু কথা উল্লেখ কৰাৰ আগতে আমি ইয়াৰ সংজ্ঞা দি ল'ব বিচাৰিছোঁ। নিখুঁত সংখ্যাৰ সংজ্ঞা ভাজকৰ (divisor) ওপৰত ভিত্তি কৰি দিয়া হয়। ইয়াৰ উপৰি প্ৰকৃত উৎপাদকসমূহৰ (aliquot part) যোগফলৰ (aliquot sum) ৰ ওপৰত ভিত্তি কৰিও দিয়া হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, ১০ সংখ্যাটোৰ বাবে aliquot sum হ'ব $১ + ২ + ৫ = ৮$।

নিখুঁত সংখ্যাৰ সংজ্ঞা: এটা সংখ্যাক নিখুঁত সংখ্যা বুলি কোৱা হয় যদি সেই সংখ্যাটোৰ aliquot sum সংখ্যাটোৰ সমান।

অৰ্থাৎ, ওপৰত উল্লেখ কৰা ১০ সংখ্যাটো এটা নিখুঁত সংখ্যা নহয়। অৰ্থাৎ নিখুঁত সংখ্যা হ'ল এনে এটা সংখ্যা যাক তাৰ প্ৰকৃত ভাজকসমূহৰ (proper divisors) যোগফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। (সংখ্যা এটা নিজেই নিজৰ ভাজক যদিও প্ৰকৃত ভাজক নহয়।) উদাহৰণস্বৰূপে, ৬ সংখ্যাটো আটাইতকৈ সৰু নিখুঁত সংখ্যা। ইয়াৰ প্ৰকৃত ভাজকবোৰ হ'ল ১, ২, আৰু ৩। সেইদৰে, ২৮ সংখ্যাটোৱো এটা নিখুঁত সংখ্যা। ইয়াৰ প্ৰকৃত ভাজকবোৰ হ'ল ১, ২, ৪, ৭, আৰু ১৪। তৃতীয় আৰু চতুৰ্থ নিখুঁত সংখ্যা দুটা হ'ল যথাক্ৰমে ৪৯৬ আৰু ৮১২৮। এই দুটা সংখ্যাক কিদৰে প্ৰকৃত ভাজকৰ যোগফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি তাক তলত দেখুৱাইছোঁ।

$$৪৯৬ = ১ + ২ + ৪ + ৮ + ১৬ + ৩১ + ৬২ + ১২৪ + ২৪৮।$$

$$\begin{aligned} ৮১২৮ &= ১ + ২ + ৪ + ৮ + ১৬ + ৩২ + ৬৪ + ১২৭ \\ &\quad + ২৫৪ + ৫০৮ + ১০১৬ + ২০৩২ + ৪০৬৪। \end{aligned}$$

প্ৰাচীন গ্ৰীক গণিতজ্ঞসকলে ওপৰত উল্লেখ কৰা প্ৰথম চাৰিটা $(৬, ২৮, ৪৯৬, ৮১২৮)$ নিখুঁত সংখ্যাৰ বিষয়েহে জানিছিল। এই নিখুঁত সংখ্যাকেইটা কেতিয়া আৰু কোনে আৱিষ্কাৰ কৰিছিল সেয়া সঠিককৈ জনা নাযায়।

নিখুঁত সংখ্যা সম্বন্ধীয় প্ৰথমটো গাণিতিক ফলাফল পোৱা যায় ইউক্লিডৰ 'এলিমেণ্টছ' নামৰ গ্ৰন্থত। তথ্য অনুসৰি ইউক্লিডৰ এলিমেণ্টছৰ Proposition ৩৬ (Book IX) ত নিখুঁত সংখ্যাৰ বিষয়ে এইদৰে পোৱা যায়– "If as many numbers as are please beginning from a unit be set out continuously in double proportion, until the sum of all becomes a prime, and if the sum multiplied into the last make some number, the product will be perfect."

ইউক্লিডে Proposition ৩৬ ত উল্লেখ কৰা 'double proportion' শব্দ দুটাই শ্ৰেণীটোত সংখ্যাবোৰ দুগুণকৈ বাঢ়ি যোৱাৰ

কথা বুজাইছে। অৰ্থাৎ যদি আমি দ্বিতীয় নিখুঁত সংখ্যাটোৰ বাবে চাওঁ, $১ + ২ + ৪ = ৭$। আৰু ৭ এটা মৌলিক সংখ্যা, লগতে ৭ ৰ লগত শেষৰ সংখ্যাটো পূৰণ কৰিলে (শেষৰ সংখ্যাটো ৪) $৭ \times ৪ = ২৮$ পাম, য'ত ২৮ এটা নিখুঁত সংখ্যা। সেইদৰে আমি অন্য এটা উদাহৰণ ল'ব পাৰোঁ: $১ + ২ + ৪ + ৮ + ১৬ = ৩১$। ৩১ এটা মৌলিক সংখ্যা আৰু ইয়াৰ লগত শেষৰ সংখ্যাটো পূৰণ কৰিলে (শেষৰ সংখ্যাটো ১৬), $৩১ \times ১৬ = ৪৯৬$ পাম, য'ত ৪৯৬ এটা নিখুঁত সংখ্যা।

সহজ ভাষাত, নিখুঁত সংখ্যাৰ ভাজকবোৰত সংখ্যা-শ্ৰেণীৰ এক নিয়মীয়া সাজোন স্পষ্টভাবে দেখা যায়। ১-ৰে আৰম্ভ হৈ দুগুণকৈ বাঢ়ি গৈ গৈ এটা মৌলিক সংখ্যা পায়গৈ; তাৰ পিছত আকৌ দুগুণকৈ বাঢ়ি যায়। ইয়াত পোৱা মৌলিক সংখ্যাটো $২^n - ১$ আকাৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, য'ত n নিজেও এটা মৌলিক সংখ্যা। এই ধৰণৰ মৌলিক সংখ্যাক মাৰ্ছিন মৌলিক (Mersenne prime) বুলি কোৱা হয়। মাৰ্ছিন নামটো আহিছে ১৭ শতিকাৰ এজন গণিতজ্ঞ মেৰিন মাৰ্ছিনৰ (Marin Mersenne) পৰা। মাৰ্ছিন মৌলিক সংখ্যাৰ লগত (যুগ্ম) নিখুঁত সংখ্যাৰ এটা অতি সুন্দৰ সম্বন্ধ আছে। ইয়াৰ বিষয়ে আমি এই প্ৰবন্ধৰ শেষৰ ফালে আলোচনা কৰিছোঁ।

পাইথাগোৰীয়সকলৰ পৰা আমি জানো যে $১, ২, ৪, ৮, ১৬, \ldots$ এইদৰে দুগুণকৈ বাঢ়ি যোৱা শ্ৰেণী এটাৰ (গুণোত্তৰ শ্ৰেণী) যোগফল তলত উল্লেখ কৰা দৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি:

$$১ + ২ + ৪ + \cdots + ২^{k-১} = ২^k - ১।$$

ইয়াৰ সহায়ত আমি ইউক্লিডে আগবঢ়োৱা Proposition ৩৬ ক গাণিতিকভাবে তলত দিয়া ধৰণে প্ৰকাশ কৰিব পাৰো:

যদি $k > ১$ ৰ বাবে $২^k - ১$ মৌলিক হয়, তেতিয়া
$২^{k-১}(২^k - ১)$ এটা নিখুঁত সংখ্যা।

উল্লেখযোগ্য যে সকলো নিখুঁত সংখ্যাই ত্ৰিভুজাকাৰ সংখ্যা আৰু সেইবোৰক ক্ৰমিক স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ যোগফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে:

$$৬ = ১ + ২ + ৩,$$
$$২৮ = ১ + ২ + ৩ + ৪ + ৫ + ৬ + ৭,$$
$$৪৯৬ = ১ + ২ + ৩ + ৪ + ৫ + ৬ + \cdots + ৬৩,$$
ইত্যাদি।

নিখুঁত সংখ্যাবোৰৰ আৰু এটা আকৰ্ষণীয় বৈশিষ্ট্য আছে। নিখুঁত সংখ্যাৰ আটাইবোৰ ভাজকৰ (প্ৰকৃত ভাজকবোৰ আৰু সংখ্যাটো নিজে) অন্যোনকৰ (reciprocal) সমষ্টি সদায় ২। যেনে:

$$\frac{১}{১} + \frac{১}{২} + \frac{১}{৩} + \frac{১}{৬} = ২,$$
$$\frac{১}{১} + \frac{১}{২} + \frac{১}{৪} + \frac{১}{৭} + \frac{১}{১৪} + \frac{১}{২৮} = ২,$$
ইত্যাদি।

নিখুঁত সংখ্যাবোৰৰ মাজত অসংখ্য আমোদজনক বৈশিষ্ট্য দেখিবলৈ পোৱা যায়। আন কেইটামান তেনেকুৱা কিছু সাধাৰণ বা সহজ উদাহৰণ হ'ল: $x^৩ + ১$ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পৰা মাত্ৰ এটাই যুগ্ম নিখুঁত সংখ্যা আছে। সেইটো হ'ল ২৮। সেইদৰে ২৮ হ'ল একমাত্ৰ যুগ্ম নিখুঁত সংখ্যা যাক দুটা ধনাত্মক সংখ্যাৰ ঘনকৰ যোগফল ($২৮ = ১^৩ + ৩^৩$) হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

বহু শতিকাজুৰি দাৰ্শনিকসকলে নিখুঁত সংখ্যাৰ গাণিতিক বৈশিষ্ট্যবোৰতকৈ ইয়াৰ ৰহস্যময় বৈশিষ্ট্য বা ধৰ্মীয় কেতবোৰ কথাতহে বেছি গুৰুত্ব দিছিল। উদাহৰণস্বৰূপে, ছেইণ্ট আগষ্টিনে (Saint Augustine) বৰ্ণনা কৰিছিল যে যদিও ঈশ্বৰে একেলগে পৃথিৱীখন সৃষ্টি কৰিব পাৰিলেহেঁতেন, তেওঁ ৬ দিন ল'বলৈ পছন্দ কৰিছিল, কিয়নো কামটোৰ নিখুঁততাৰ প্ৰতীক নম্বৰ ৬। ঠিক সেইদৰে পুৰণি নিয়মৰ প্ৰাৰম্ভিক ভাষ্যকাৰসকলে যুক্তি দিছিল যে বিশ্বব্ৰহ্মাণ্ডৰ নিখুঁততা ২৮ ৰ দ্বাৰা প্ৰতিনিধিত্ব কৰা হয়, কিয়নো চন্দ্ৰক পৃথিৱীৰ চাৰিওফালে ঘূৰিবলৈ প্ৰয়োজন হোৱা সময় হ'ল ২৮ দিন।

নিখুঁত সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত দ্বিতীয় গুৰুত্বপূৰ্ণ অধ্যয়ন আগবঢ়ায় নিকোমাকাচ (Nicomachus of Gerasa) নামৰ অন্য এজন গণিতজ্ঞই। প্ৰায় ১০০ চনৰ সময়ত নিকোমাকাচে তেওঁৰ জনপ্ৰিয় কিতাপ 'Introduction to Arithmetic' লিখি উলিয়ায়। এই গ্ৰন্থত নিকোমাকাচে সংখ্যাসমূহক নিখুঁত সংখ্যাৰ আধাৰত ভাগ (classification) কৰাৰ কথা পোৱা যায়। নিকোমাকাচে সংখ্যাবোৰক তিনিটা শ্ৰেণীত ভাগ কৰিছিল।

- সমৃদ্ধ সংখ্যা (abundant number)। যাৰ প্ৰকৃত ভাজকসমূহৰ যোগফল সংখ্যাটোতকৈ ডাঙৰ। উদাহৰণস্বৰূপে, ১২, ইয়াৰ প্ৰকৃত ভাজকসমূহৰ যোগফল ১৬, (অৰ্থাৎ $১ + ২ + ৩ + ৪ + ৬ = ১৬ > ১২$)।
- অভাৱী সংখ্যা (deficient number)। যাৰ প্ৰকৃত ভাজকসমূহৰ যোগফল সংখ্যাটোতকৈ সৰু। উদাহৰণস্বৰূপে

৯, ইয়াত ৯ প্ৰকৃত ভাজকসমূহৰ যোগফল ৪, (অৰ্থাৎ $১ + ৩ = ৪ < ৯$)।

- আৰু নিখুঁত সংখ্যা।

নিকোমাচাচে উল্লেখ কৰিছিল যে নিখুঁত সংখ্যাবোৰে এটা নিৰ্দিষ্ট ক্ৰম মানি চলে। উদাহৰণস্বৰূপে, এটা অংকৰে গঠিত সংখ্যাবোৰৰ ভিতৰত এটা মাত্ৰ নিখুঁত সংখ্যা (৬) আছে, ঠিক সেইদৰে দুটা অংকৰে গঠিত সংখ্যাসমূহৰ মাজত অন্য এটা নিখুঁত সংখ্যা (২৮) আছে, তিনিটা অংকৰে গঠিত সংখ্যাসমূহৰ মাজত অন্য এটা নিখুঁত সংখ্যা (৪৯৬) আছে, সেইদৰে চাৰিটা অংকৰে গঠিত সংখ্যাবোৰৰ মাজত অন্য এটা নিখুঁত সংখ্যা (৮১২৮) আছে, ইত্যাদি। লগতে এই চাৰিটা নিখুঁত সংখ্যাৰ শেষৰ অংকটোত ৬ আৰু ৮ সাল-সলনি হৈ আছে। ইয়াৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি তেওঁ নিখুঁত সংখ্যাৰ সম্বন্ধে তলত উল্লেখ কৰা কিছুমান অনুমান বা দাবী কৰিছিল। আধুনিক ভাষাত তেওঁৰ এই অনুমানবোৰ আছিল এনেধৰণৰ:

- n সংখ্যক নিখুঁত সংখ্যাত n পৰিমাণৰ অংক (digit) থাকে।
- সকলো নিখুঁত সংখ্যাই যুগ্ম।
- সকলো (যুগ্ম) নিখুঁত সংখ্যাৰ শেষৰ অংকটোত ৬ আৰু ৮ ক্ৰমে সাল-সলনি কৰি আহে।
- সকলো নিখুঁত সংখ্যা ইউক্লিডৰ সূত্ৰটোৰ সহায়েৰে পোৱা যায়। অৰ্থাৎ, সকলো নিখুঁত সংখ্যা $২^{k-১}(২^k - ১)$ ৰূপত থাকে, য'ত $k > ১$ আৰু $২^k - ১$ এটা মৌলিক সংখ্যা।
- অসংখ্য পৰিমাণৰ নিখুঁত সংখ্যা আছে।

নিকোমাকাচৰ এই পাঁচটা দাবী (assertion) সময়ৰ লগে লগে কিদৰে প্ৰমাণ হৈছে বা অসত্য বুলি প্ৰতিপন্ন হৈছে, সেয়া আমি আলোচনা কৰিম। কিন্তু এই মুহূৰ্তত আমি চমুকৈ উল্লেখ কৰিব খুজিছোঁ যে নিকোমাকাচৰ (১) নং আৰু (৩) নং দাবী দুটা সত্য নহয়। আনহাতে, (২), (৪) আৰু (৫) নং এতিয়াও প্ৰমাণহীন (open questions) হৈ আছে।

আৰবীয় গণিতজ্ঞসকলৰ মাজতো নিখুঁত সংখ্যাৰ বিষয়ে আগ্ৰহ দেখিবলৈ পোৱা গৈছিল। তথ্য অনুসৰি থেবিট ইবন কুৰা (Thabit ibn Qurra) নামৰ গণিতজ্ঞজনে p মৌলিক হ'লে $২^n p$ এটা নিখুঁত সংখ্যা বুলি উল্লেখ কৰিছিল। ইবন আল হাইথামে (Ibn al Haytham) ইউক্লিডৰ Proposition ৩৬ৰ বিপৰীত দিশটো (converse part) প্ৰমাণ কৰে। ইছমাইল ইবন ইব্ৰাহিম ইবন ফালাছে (Ismail ibn Ibrahim ibn Fallus) (১১৯৪ – ১২৩৯) নিকোমাকাচৰ 'Introduction to arithmetica' ওপৰত ভিত্তি কৰি অধ্যয়ন কৰে। তেওঁ নিকোমাকাচৰ সংখ্যাৰ শ্ৰেণী-বিভাগখিনি গ্ৰহণ কৰিছিল যদিও, নিকোমাকাচৰ দৰে নিখুঁত সংখ্যাৰ ৰহস্য বা নিখুঁত সংখ্যাক ভগৱান বা অন্য কাহিনীৰ লগত জড়িত কৰা কথাবোৰ গুৰুত্ব দিয়াৰ সলনি ইয়াৰ গাণিতিক বৈশিষ্ট্যৰ ওপৰত বেছি গুৰুত্ব দিছিল। ইবন ফালাছে ১০ টা সংখ্যাৰ এখন তালিকা দিছিল আৰু এই আটাইবোৰ নিখুঁত সংখ্যা বুলি দাবী কৰিছিল। পিছত প্ৰমাণ হয় যে ইয়াৰে প্ৰথম সাতটা নিখুঁত সংখ্যা আছিল। আৰু বাকী তিনিটা শুদ্ধ নহয়।

১৫ শতিকাৰ ইউৰোপত নিকোমাকাচৰ দাবীসমূহক সত্য বুলি বিবেচনা কৰা হৈছিল। আনকি আৰব বা অন্য দেশৰ গণিতজ্ঞসকলে নিখুঁত সংখ্যাৰ সম্পৰ্কত কৰা অধ্যয়নৰ বিষয়েও ইউৰোপীয়সকলে জনা নাছিল। বহুতে বিশ্বাস কৰিছিল সকলো অযুগ্ম সংখ্যা (k) বাবে $২^{k-১}(২^k - ১)$ নিখুঁত হয়। ১৫০৯ চনত চাৰ্লচ ডি বোভেলচ (Charles de Bovelles) নামৰ এজন ধৰ্মতত্ত্ববিদ (theologian) আৰু দাৰ্শনিকে নিখুঁত সংখ্যাৰ সম্পৰ্কত এখন গ্ৰন্থ প্ৰকাশ কৰে। উক্ত গ্ৰন্থত তেওঁ ইউক্লিডৰ সূত্ৰ $২^{k-১}(২^k - ১)$ এ সকলো অযুগ্ম সংখ্যা k ৰ বাবে নিখুঁত সংখ্যা দিয়ে বুলি উল্লেখ কৰিছিল (যিটো সত্য নহয়)।

১৪৬১ চনত লিখা এখন পাণ্ডুলিপিত (manuscript) পঞ্চম নিখুঁত সংখ্যাটো আৱিষ্কাৰ হয়। এই একেটা সংখ্যা অন্য এখন পাণ্ডুলিপিতো পোৱা যায় আৰু সেইজন লেখকৰে অন্য এখন পাণ্ডুলিপি পোৱা যায় ১৪৬০ চনত, য'ত তেওঁ পঞ্চম আৰু ষষ্ঠ নিখুঁত সংখ্যা দুটাৰ কথা উল্লেখ কৰিছে। এই লেখকজনৰ বিষয়ে বৰ বেছি কথা পোৱা হোৱা নাছিল।

১৫৩৬ চনত হুদালৰিচাছ ৰেগিউচে (Hudalrichus Regius) নিখুঁত সংখ্যাৰ সম্পৰ্কত থকা এটা বহুদিনীয়া ভুল ধাৰণা প্ৰমাণ কৰিবলৈ সক্ষম হয়। তেওঁ দেখুৱায় যে $২^{১১} - ১ = ২০৪৭ = ২৩ \times ৮৯$, আৰু ইয়াৰ সহায়ত তেওঁ দেখুওৱাবলৈ সক্ষম হয় যে $২^{p-১}(২^p - ১)$ সকলো মৌলিক সংখ্যাৰ বাবে নিখুঁত সংখ্যা নহয়। যিটো ইয়াৰ আগৰ গণিতজ্ঞ আৰু অন্য লোকসকলে মৌলিক সংখ্যা হয় বুলি বিশ্বাস কৰিছিল। তেওঁ লগতে দেখুৱায় যে $২^{১৩} - ১ = ৮১৯১$ এটা মৌলিক সংখ্যা। গতিকে ইয়াৰ দ্বাৰা তেওঁ $২^{১২}(২^{১৩} - ১) = ৩৩৫৫০৩৩৬$ সংখ্যাটো নিখুঁত সংখ্যা বুলি দাঙি ধৰিবলৈ সক্ষম হয়। অৰ্থাৎ, এইটোৱেই হ'ল পঞ্চমটো শুদ্ধ নিখুঁত সংখ্যা।

ইয়াৰ পৰা এইটো কথা স্পষ্ট হৈ পৰে যে p মৌলিক হ'লেও $২^p - ১$ মৌলিক নহ'বও পাৰে, কিন্তু $২^p - ১$ মৌলিক হ'বলৈ হ'লে p মৌলিক হ'বই লাগিব। এই ধৰণৰ মৌলিক সংখ্যাকে মাৰ্ছিন

মৌলিক সংখ্যা বোলা হয়। লগতে ই প্ৰমাণ কৰে যে নিকোমাকাচৰ প্ৰথম দাবী সত্য নহয়। অৰ্থাৎ পঞ্চম নিখুঁত সংখ্যাটোত পাঁচটাতকৈ বেছি অংক আছে। J. Scheybl এ ১৫৫০ চনত ইউক্লিডৰ এলিমেণ্টছখনৰ অনুবাদৰ পাতনিত পঞ্চমটো নিখুঁত সংখ্যাৰ কথা উল্লেখ কৰিছিল যদিও ১৯৭৭ চন পৰ্যন্ত সেয়া অন্য লোকৰ দৃষ্টিগোচৰ নহৈছিল। নিকোমাকাচে উল্লেখ কৰাৰ বিপৰীতে, পাঁচটা অংকৰে গঠিত সংখ্যাসমূহত কোনো নিখুঁত সংখ্যা নাই। পঞ্চম নিখুঁত সংখ্যাটোত থকা অংকৰ সংখ্যা ৮ টা। সেইদৰে ষষ্ঠ নিখুঁত সংখ্যাটো হ'ল ৮৫৮৯৮৬৯০৫৬, ই নিকোমাকাচৰ তৃতীয় দাবীটো সত্য নহয় বুলি প্ৰমাণ কৰে। কাৰণ, পঞ্চম আৰু ষষ্ঠ দুয়োটা নিখুঁত সংখ্যাৰ শেষৰ অংকটো ৬, অৰ্থাৎ ইহঁতৰ ক্ষেত্ৰত ৬ আৰু ৮ ৰ সাল-সলনি ঘটা নাই।

মৌলিক সংখ্যাৰ লগত নিখুঁত সংখ্যাৰ এটা গুৰুত্বপূৰ্ণ সম্বন্ধৰ কথা আমি ইতিমধ্যে আলোচনা কৰিছোঁ। অৰ্থাৎ, প্ৰতিটো $২^p - ১$ মাৰ্ছিন মৌলিক সংখ্যাৰ বিপৰীতে এটা নিখুঁত সংখ্যা পোৱা যায়, সেই কথা আমি ইতিমধ্যে জ্ঞাত। কিন্তু অধিক পৰিমাণৰ নিখুঁত সংখ্যা বিচাৰি উলিওৱাটো তেতিয়াও সহজ নাছিল। বিশেষকৈ কোনো এটা বৃহৎ সংখ্যা মাৰ্ছিন মৌলিক সংখ্যা হয়নে নহয় সেয়া পৰীক্ষা কৰা যথেষ্ট কঠিন।

১৬০৩ চনত, পিয়েট্ৰো কেটাল্ডিয়ে (Pietro Cataldi), ৭৫০ তকৈ সৰু সকলো মৌলিক সংখ্যাৰ এখন তালিকা প্ৰস্তুত কৰিছিল। কেটাল্ডিয়ে এই তালিকাৰ সহায়ত নিৰ্ণয় কৰিছিল যে $২^{১৭} - ১$ এটা মৌলিক সংখ্যা আৰু ইয়াৰ ফলস্বৰূপে, $২^{১৬}(২^{১৭} - ১) = ৮৫৮৯৮৬৯০৫৬$ এটা নিখুঁত সংখ্যা। তেওঁ সপ্তমটো নিখুঁত সংখ্যাও নিৰ্ণয় কৰিবলৈ সক্ষম হৈছিল: $২^{১৮}(২^{১৯} - ১) = ১৩৭৪৩৮৬৯১৩২৮$।

আমি ইতিমধ্যে অনুমান কৰিব পাৰিছোঁ যে নিখুঁত সংখ্যাৰ ইতিহাস অসংখ্য ভুল-ত্ৰুটিৰে ভৰি আছে। কেটাল্ডীয়ে দুটা নতুন নিখুঁত সংখ্যা বিচাৰি পোৱা স্বত্বেও কিছুমান মিছা দাবী কৰিছিল। তেওঁ লিখিছিল যে $p = ২, ৩, ৫, ৭, ১৩, ১৭, ১৯, ২৩, ২৯, ৩১, ৩৭$ ৰ বাবে $২^{p-১}(২^p - ১)$ য়ে নিখুঁত সংখ্যা দিয়ে। তেওঁ $p = ২, ৩, ৫, ৭, ১৩, ১৭, ১৯$ বাবে সচাঁ আছিল। এই প্ৰমাণ তেওঁ প্ৰস্তুত কৰা মৌলিক সংখ্যাৰ তালিকাৰ সহায়ত দিছিল। কিন্তু তেওঁৰ $p = ২৩, ২৯, ৩১, ৩৭$ এই চাৰিটা দাবীৰ ভিতৰত কেৱল এটাহে শুদ্ধ আছিল।

বহুতো গণিতজ্ঞ নিখুঁত সংখ্যাৰ সম্বন্ধে আগ্ৰহী আছিল আৰু ইয়াত অৰিহণা যোগাবলৈ চেষ্টা কৰিছিল। উদাহৰণস্বৰূপে, ডেকাৰ্টে ১৬৩৮ চনত মাৰ্ছিনলৈ নিখুঁত সংখ্যা সমন্ধে লিখা কিছু চিঠি পোৱা যায়।

নিখুঁত সংখ্যা সম্বন্ধীয় পৰৱৰ্তী কিছু গুৰুত্বপূৰ্ণ অৱদান আগবঢ়াইছিল ফাৰ্মাই (Pierre de Fermat)। তেওঁ ১৬৩৬ চনত এজন গণিতজ্ঞক কৈছিল যে তেওঁ বিষয়টোৰ সম্পৰ্কত কাম কৰি আছে। যদিও নিখুঁত সংখ্যা সম্বন্ধীয় সমস্যাবোৰ অতি কঠিন আছিল, তেওঁ বিষয়টোৰ সম্পৰ্কত কিছু লেখা প্ৰকাশ কৰিব বিচাৰিছিল। কিন্তু সেয়া তেওঁৰ লিখা নহ'ল। ১৬৪০ চনৰ জুন মাহত ফাৰ্মাই মাৰ্ছিনলৈ চিঠিৰ যোগেদি নিখুঁত সংখ্যা সম্পৰ্কীয় তেওঁৰ কিছু আৱিষ্কাৰৰ বিষয়ে জনাইছিল। মাৰ্ছিনলৈ এই পত্ৰখন লিখাৰ কেইমাহমান পিছতে ফাৰ্মাই আন এজন গণিতজ্ঞলৈ এই সম্পৰ্কে পত্ৰ লিখিছিল। সেই পত্ৰখনত তেওঁ আগৰ পত্ৰখনত থকা ফলাফলৰ এটা সাধাৰণীকৰণ দিছিল, যাক এতিয়া ফাৰ্মাৰ লিটল উপপাদ্য (Fermat's Little Theorem) বুলি জনা যায়, যিয়ে দেখুৱায় যে যদি (p) এটা মৌলিক সংখ্যা আৰু (a) এটা অখণ্ড সংখ্যা, য'ত $(a, p) = ১$, তেন্তে $a^{p-১} - ১$ ক p ৰে হৰণ যায়। এয়া নিশ্চিত যে ফাৰ্মাই তেওঁৰ এই উপপাদ্যটো নিখুঁত সংখ্যাৰ সম্পৰ্কত কৰা তেওঁৰ অনুসন্ধানৰ ফলস্বৰূপে বিচাৰি পাইছিল।

ফাৰ্মাই উপপাদ্যটোৰ নিচিনা এটা বিশেষ ফলাফল ব্যৱহাৰ কৰি ১৬৪০ চনৰ জুন মাহত মাৰ্ছিনলৈ লিখা পত্ৰখনত কেটাল্ডিৰ দুটা দাবী যে সত্য নহয় সেই কথা ক'বলৈ ইতিমধ্যে সক্ষম হৈছিল। তেওঁ দেখুৱাইছিল যে $২^{২৩} - ১$ যৌগিক সংখ্যা (অৰ্থাৎ $২^{২৩} - ১ = ৪৭ \times ১৭৮৪৮১$)। আৰু ঠিক সেইদৰেই কেটাল্ডিয়ে উল্লেখ কৰা $২^{৩৭} - ১$ ও মৌলিক সংখ্যা নহয় (প্ৰকৃততে $২^{৩৭} - ১ = ২২৩ \times ৬১৬৩১৮১৭৭$)।

ফাৰ্মাই নিখুঁত সংখ্যা সম্বন্ধীয় যিবোৰ ফলাফল মাৰ্ছিনলৈ প্ৰেৰণ কৰিছিল সেইবোৰৰ প্ৰতি মাৰ্ছিন অতি আগ্ৰহী আছিল। আৰু এই ফলাফলসমূহৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি তেওঁ সোনকালেই নিজৰ এটা দাবী প্ৰস্তুত কৰিছিল, যিটোৱে বহু বছৰ ধৰি গণিতজ্ঞসকলক আকৰ্ষিত কৰিবলৈ সক্ষম হৈছিল। ১৬৪৪ চনত তেওঁ 'Cogitata Physica Mathematica' প্ৰকাশ কৰিছিল, য'ত তেওঁ দাবী কৰিছিল যে $p = ২, ৩, ৫, ৭, ১৩, ১৭, ১৯, ৩১, ৬৭, ১২৭, ২৫৭$ ৰ বাবে $২^p - ১$ মৌলিক সংখ্যা আৰু সেয়েহে p ৰ এই মানবোৰৰ বাবে $২^{p-১}(২^p - ১)$ এটা নিখুঁত সংখ্যা হ'ব। আৰু ২৫৭ লৈকে p আন কোনো মানৰ বাবে মৌলিক সংখ্যা নাই বুলি তেওঁ উল্লেখ কৰিছিল। এয়া নিশ্চিত যে মাৰ্ছিনে এই ফলাফলবোৰ পৰীক্ষা কৰা নাছিল।

নিখুঁত সংখ্যাৰ সম্বন্ধীয় গুৰুত্বপূৰ্ণ অৱদান আগবঢ়োৱা অন্য এজন ব্যক্তি আছিল অয়লাৰ। ১৭৩২ চনত তেওঁ

প্ৰমাণ কৰে যে অষ্টম নিখুঁত সংখ্যাটো $২^{৩০}(২^{৩১} - ১) = ২৩০৫৮৪৩০০৮১৩৯৯৫২১২৮$। এইটো ১২৫ বছৰৰ মূৰত আৱিষ্কৃত প্ৰথমটো নতুন নিখুঁত সংখ্যা আছিল। তাৰ পিছত ১৭৩৮ চনত অয়লাৰে কেটাল্ডিৰ অন্তিমটো দাবী নিষ্পত্তি কৰে যেতিয়া তেওঁ প্ৰমাণ কৰে যে $২^{২৯} - ১$ মৌলিক সংখ্যা নহয়। সেয়েহে এয়া ক'ব পাৰি য়ে কেটাল্ডিৰ অনুমান খুব ভাল নাছিল। লগতে এইটো লক্ষ্য কৰিব লাগিব যে মাৰ্ছিন এই দুয়োটা ক্ষেত্ৰতে সঠিক আছিল, কিয়নো মাৰ্ছিনৰ তালিকাত $p =$ ৩১ উল্লেখ আছিল কিন্তু $p =$ ২৯ তেওঁৰ তালিকাত নাছিল।

জীৱনকালত অপ্ৰকাশিত দুখন পাণ্ডুলিপিত, অয়লাৰে ইউক্লিডৰ ফলাফলৰ বিপৰীত দিশটো প্ৰমাণ কৰি দেখুৱাইছিল যে প্ৰতিটো যুগ্ম নিখুঁত সংখ্যা $২^{p-১}(২^p - ১)$ ৰূপৰ হ'ব লাগিব।

অয়লাৰে অযুগ্ম নিখুঁত সংখ্যা আছেনে নাই সেই সমস্যাটোৰ সম্পৰ্কত কিছু আগবাঢ়িবলৈ চেষ্টা কৰিছিল। অয়লাৰে $p =$ ৪১ আৰু $p =$ ৪৭ ৰ বাবে $২^{p-১}(২^p - ১)$ নিখুঁত সংখ্যা বুলি দাবী কৰিছিল। কিন্তু পিছত তেওঁ নিজৰ ত্ৰুটি বিচাৰি পায় আৰু ১৭৫৩ চনত সংশোধন কৰে।

মাৰ্ছিনৰ তালিকাৰ প্ৰথম ত্ৰুটিটো ১৮৭৬ চনত লুকাচে (Edouard Lucas) আৱিষ্কাৰ কৰিছিল। লুকাচে উল্লেখ কৰিছিল যে $২^{৬৭} - ১$ মৌলিক সংখ্যা নহয়, কিন্তু তেওঁৰ পদ্ধতিবোৰে ইয়াৰ কোনো প্ৰমাণ দিবলৈ সক্ষম হোৱা নাছিল। ১৯০৩ চনত ফ্ৰেংক নেলচন ক'লে (Frank Nelson Cole) $২^{৬৭} - ১$ সংখ্যাটো যৌগিক বুলি প্ৰমাণ কৰিবলৈ সক্ষম হয়। সেই বছৰৰ অক্টোবৰ মাহত American Mathematical Society ৰ এখন সভাত বৃহৎ সংখ্যক লোকৰ উপস্থিতিত তেওঁ 'On the factorization of Large Numbers' শীৰ্ষক এখন গৱেষণা-পত্ৰ উপস্থাপন কৰিছিল। বহুতে এইটো গণিত জগতৰ আচহুৱা 'বক্তৃতা'সমূহৰ ভিতৰত এটা বুলি উল্লেখ কৰে। সেইদিনা তেওঁ ব্লেকব'ৰ্ডত প্ৰথমে $২^{৬৭} - ১ = ১৪৭৫৭৩৯৫২৫৮৯৬৭৬৪১২৯২৭$ বুলি লিখে। তাৰ পিছত তেওঁ ব্লেকব'ৰ্ডৰ অন্য এটা অংশত ৭৬১৮৩৮২৫৭২৮৭ আৰু তাৰ তলতে ১৯৩৭০৭৭২১ সংখ্যাটো লিখে, আৰু দুয়োটা সংখ্যা পূৰণ কৰি উক্ত সংখ্যাটো উলিয়াই দেখুৱায়। তাৰ পিছত তেওঁ মুখেৰে একো নোকোৱাকৈ নিজৰ আসন গ্ৰহণ কৰেগৈ আৰু লগে লগে দৰ্শকৰ হাততালিৰে সভা মুখৰিত হৈ উঠে! ডেভিদ এম. বাৰ্টনে তেওঁৰ 'Elementary Number Theory' গ্ৰন্থত দিয়া ক'লৰ সেই 'বক্তৃতা'টোৰ বৰ্ণনাটো উল্লেখ কৰাৰ লোভ সামৰিব নোৱাৰিলোঁ:

"At the October 1903 meeting of the American Mathematical Society, the American mathematician Frank Nelson Cole had a paper on the program with the somewhat unassuming title 'On the Factorization of Large Numbers.' When called upon to speak, Cole walked to a board and, saying nothing, proceeded to raise the integer 2 to the 67th power; then he carefully subtracted 1 from the resulting number and let the figure stand. Without a word he moved to a clean part of the board and multiplied, longhand, the product

$$193,707,721 \times 761,838,257,287.$$

The two calculations agreed. The story goes that, for the first and only time on record, this venerable body rose to give the presenter of a paper a standing ovation. Cole took his seat without having uttered a word, and no one bothered to ask him a question. (Later, he confided to a friend that it took him 20 years of Sunday afternoons to find the factors of M_{67}.)"

নিখুঁত সংখ্যাৰ সম্বন্ধে মাৰ্ছিনে উল্লেখ কৰা অন্য কিছু কথা পৰৱৰ্তী সময়ত সত্য নহয় বুলি প্ৰমাণ হৈছে। উদাহৰণস্বৰূপে, ১৯১১ চনত পাৱাৰ্ছে (R. E. Powers) দেখুৱায় যে $২^{৮৮}(২^{৮৯} - ১)$ এটা নিখুঁত সংখ্যা (যিটো মাৰ্ছিনে তেওঁৰ তালিকাত নিখুঁত সংখ্যা হিচাপে উল্লেখ কৰা নাছিল)। কিছুবছৰ পিছত পাৱাৰ্ছে পুনৰ দেখুৱায় যে $২^{১০৭} - ১$ এটা মৌলিক সংখ্যা, সেয়েহে $২^{১০৬}(২^{১০৭} - ১)$ নিখুঁত সংখ্যা। এই সংখ্যাটোৱো মাৰ্ছিনৰ তালিকাত নাছিল। ১৯২২ চনত আন এজন গণিতজ্ঞই (M. Kraitchik) দেখুৱায় যে মাৰ্ছিনে দাবী কৰা আটাইতকৈ ডাঙৰ সংখ্যাটো, $২^{২৫৭} - ১$ প্ৰকৃততে মৌলিক সংখ্যা নহয়।

এই মুহূৰ্তলৈকে (অৰ্থাৎ ২০২১ লৈ) মুঠ ৫১ টা নিখুঁত সংখ্যা আৱিষ্কাৰ হৈছে। ইয়াৰ পৰা এটা কথা অনুমান কৰিব পাৰি যে নিখুঁত সংখ্যাবোৰ অতি বিৰল। এতিয়ালৈকে আৱিষ্কাৰ হোৱা নিখুঁত সংখ্যাবোৰৰ ভিতৰত আটাইতকৈ ডাঙৰ নিখুঁত সংখ্যাটো হ'ল

$$২^{৮২৫৮৯৯৩২}(২^{৮২৫৮৯৯৩৩} - ১)।$$

এই নিখুঁত সংখ্যাটো ২৩ নিযুত অংকৰে গঠিত।

বৰ্তমানলৈকে আৱিষ্কৃত সকলো নিখুঁত সংখ্যাই যুগ্ম। গণিতজ্ঞসকলৰ মনলৈ সঘনে আহি থকা এটা প্ৰশ্ন হ'ল অযুগ্ম নিখুঁত সংখ্যা আছেনে নাই? এই প্ৰশ্নৰ বৰ্তমানলৈকে কোনো উত্তৰ নাই। যদিও এই প্ৰশ্নৰ বৰ্তমানলৈকে কোনো সঠিক উত্তৰ নাই, গণিতজ্ঞসকলে এটা অযুগ্ম নিখুঁত সংখ্যা যদি থাকে সেই সংখ্যাটোৰ কেনেধৰণৰ বৈশিষ্ট্য থাকিব ইত্যাদি কথাবোৰ অধ্যয়ন কৰি আছে। যেনে, যদি এটা অযুগ্ম নিখুঁত সংখ্যা পোৱা যায়, সেই সংখ্যাটো $১০^{১৫০০}$ তকৈ ডাঙৰ হ'ব লাগিব। লগতে সেই সংখ্যাটো ১০৫ ৰে হৰণ নাযাব।

যিহেতু নিখুঁত সংখ্যাবোৰ অতি বিৰল, লগতে এতিয়াও গণিতজ্ঞসকলে নিখুঁত সংখ্যাৰ সম্পৰ্কে সম্পূৰ্ণৰূপে জানিবলৈ সক্ষম হোৱা নাই, সেয়েহে নিখুঁত সংখ্যা বা তেনে ধৰণৰ বৈশিষ্ট্য থকা অন্য সংখ্যাৰ বিষয়ে অধিক জানিবলৈ নিখুঁত সংখ্যাৰ বিভিন্ন সাধাৰণীকৰণ হৈছে। ইয়াৰ ভিতৰত জুমকেলাৰ সংখ্যা (Zumkeller numbers) উল্লেখযোগ্য। জুমকেলাৰ সংখ্যা হ'ল এনে এটা সংখ্যা যাৰ উৎপাদকসমূহক দুটা ভিন্ন ভাগত (partition) ভাগ কৰিব পাৰি, আৰু লগতে এইদৰে ভাগ কৰা দুয়োটা ভাগৰ উৎপাদকসমূহৰ যোগফল সমান। উদাহৰণস্বৰূপে, ২০ সংখ্যাটো এটা জুমকেলাৰ সংখ্যা। কাৰণ ইয়াৰ উৎপাদকসমূহ $\{১, ২, ৪, ৫, ১০, ২০\}$। আমি এই উৎপাদকসমূহক দুটা ভাগত ভাগ কৰিব পাৰোঁ য'ত প্ৰতিটো ভাগৰ যোগফল সমান হয়। ক $= \{১, ২০\}$; খ $= \{২, ৪, ৫, ১০\}$। দুয়োটা ভাগৰ উৎপাদকসমূহৰ যোগফল ২১। প্ৰথম কেইটামান জুমকেলাৰ সংখ্যা হ'ল ৬, ১২, ২০, ২৪, ২৮, ৩০, ৪০, ৪২, ইত্যাদি। জুমকেলাৰ আৰু নিখুঁত সংখ্যাৰ এটা অতি গুৰুত্বপূৰ্ণ সম্বন্ধ হ'ল প্ৰতিটো নিখুঁত সংখ্যাই এটা জুমকেলাৰ সংখ্যা। কাৰণ, ইয়াত প্ৰকৃত উৎপাদকসমূহক এটা ভাগত ৰাখিব পাৰি আৰু সংখ্যাটোক অকলে এটা ভাগত ৰাখিব পাৰি। আৰু অধিক সাধাৰণীকৰণ কৰি জুমকেলাৰ সংখ্যাকো সাধাৰণীকৰণ কৰা হয়, ইয়াক k-স্তৰযুক্ত সংখ্যা (k-Layered Numbers) বোলা হৈছে। এটা সংখ্যাক k-স্তৰযুক্ত সংখ্যা বুলি কোৱা হ'ব যদি ইয়াৰ উৎপাদকসমূহক k টা ভিন্ন ভাগত ভাগ কৰিব পৰা যায় আৰু প্ৰত্যেকটো ভাগৰ উৎপাদকসমূহৰ যোগফল সমান হয়। এই ধাৰণাৰ পৰা ক'ব পাৰি যে জুমকেলাৰ সংখ্যাবোৰ হ'ল k-স্তৰযুক্ত সংখ্যা য'ত $k = ২$ অৰ্থাৎ জুমকেলাৰ সংখ্যাবোৰ ২-স্তৰযুক্ত সংখ্যা। (ঊনসপ্ততিতম সংখ্যাৰ (এপ্ৰিল-জুন, ২০২১) 'গণিত বিকাশ'ৰ ৮৮ নং পৃষ্ঠাত কেইটামান k-স্তৰযুক্ত সংখ্যাৰ বিষয়ে ৰসালকৈ কোৱা হৈছে।)

টোকা

- নিখুঁত সংখ্যা হ'ল সংখ্যাতত্ত্বৰ এটা অতি ৰোমাঞ্চকৰ অধ্যায় বা বিষয়। ইয়াৰ অধ্যয়ন অতি পুৰণি, আৰু অসংখ্য ভুল-ক্ৰুটিৰে পৰিপূৰ্ণ। বিভিন্ন গণিতজ্ঞই নিখুঁত সংখ্যাৰ সম্পৰ্কত বিভিন্ন ফলাফল আগবঢ়াইছে। এই সৰু লেখাটোত বিশেষকৈ নিখুঁত সংখ্যাৰ প্ৰাৰম্ভিক সময়ৰ কিছু কথা আৰু অতি চমুকৈ শেহতীয়া গৱেষণাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিবলৈ চেষ্টা কৰা হৈছে। নিখুঁত সংখ্যা সম্বন্ধীয় বিভিন্ন নতুন ফলাফল আজিও গণিতজ্ঞসকলৰ গৱেষণাৰ অন্যতম বিষয়, য'ত অত্যাধুনিক গাণিতিক বিষয়-বস্তুৰ প্ৰয়োগ ঘটে। এই আলোচনাত নিখুঁত সংখ্যা সম্বন্ধীয় অলেখ কথা ৰৈ গৈছে।
- লেখাটো J J O'Connor আৰু E F Robertson ৰ 'Perfect Numbers' শীৰ্ষক লেখাটোৰ আলমত লিখা হৈছে।

অন্যান্য তথ্যসূত্ৰ

- *সোণালী সংখ্যা*, বিপুলজ্যোতি শইকীয়া। ষ্টুডেন্টচ্ ষ্ট'ৰচ্।
- *Elementary Number Theory*, David M. Burton. Tata McGraw-Hill Education.
- Odd Perfect Numbers: A Triptych, William Dunham. The Mathematical Intelligencer
- Some Properties of Zumkeller Numbers and k-Layered Numbers, P. J. Mahanta, M. P. Saikia, D. Yaqubi. Journal of Number Theory.

৬ ক বাদ দি যিকোনো এটা যুগ্ম নিখুঁত সংখ্যাৰ অংকবোৰ যদি যোগ কৰা হয়, তাৰ পিছত ফলাফল ৰূপে পোৱা সংখ্যাটোৰ অংকবোৰ যদি যোগ কৰা হয়, আৰু এনেদৰে কৰি গৈ থকা হয়, তেন্তে একেবাৰে শেষত যোগফলটো ১ পোৱা যায়। যেনে: ৮১২৮ $\rightarrow$ ১৯ $\rightarrow$ ১০ $\rightarrow$ ১।