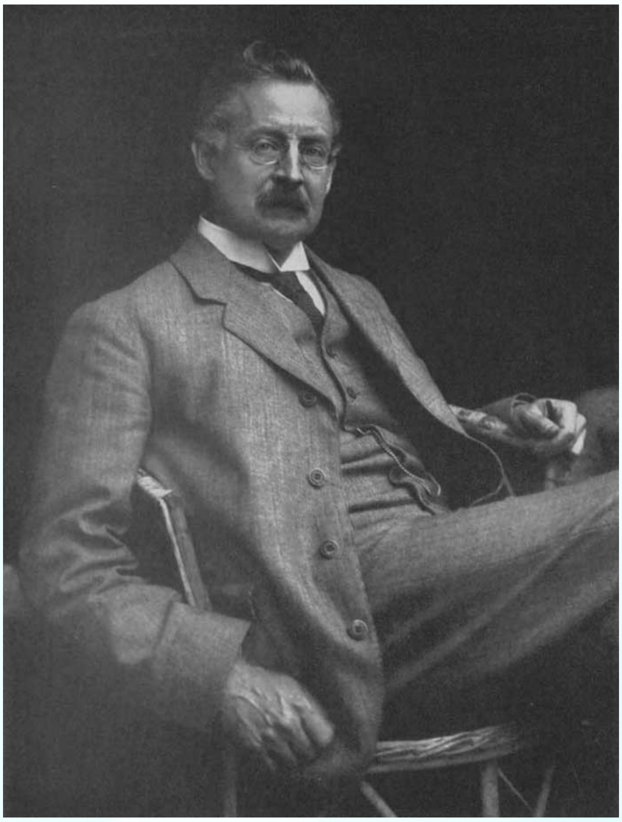
কাৰ্ল ডেভিদ ট'লমে ৰঞ্জ

ফিৰদৌচ-ঈ-জান্নাত

তেজপুৰ বিশ্ববিদ্যালয়

সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণৰ (Ordinary differential equation) সাংখ্যিক (numerical) সমাধানৰ কথা ক'বলৈ গ'লে আমি ৰঞ্জ-কাট্টা প্ৰণালীসমূহৰ (Runge-Kutta methods) কথা ক'বই লাগিব। (ইয়াক ৰুংগা-কুট্টা মেথডছ বা ৰাংগে-কুট্টা মেথডছ বুলিও বহুলোকে উচ্চাৰণ কৰা শুনা যায়।) ইয়াৰ উদ্ভাৱনৰ আঁৰৰ গণিতজ্ঞ দুজন হৈছে কাৰ্ল ডেভিদ ট'লমে ৰঞ্জ (Carl David Tolmé Runge) আৰু মাৰ্টিন ৱিলহেল্ম কাট্টা (Martin Wilhelm Kutta)।



কাৰ্ল ৰঞ্জৰ গৱেষণাৰ ক্ষেত্ৰখন ইমানেই বিস্তৃত আছিল যে কিছুসংখ্যক পদাৰ্থবিজ্ঞানীয়ে তেওঁক এগৰাকী গণিতজ্ঞ আৰু কিছুসংখ্যক গণিতজ্ঞই তেওঁক পদাৰ্থবিজ্ঞানী বুলি মান্যতা প্ৰদান কৰে। এইগৰাকী মহান গৱেষকে ১৮৫৬ চনৰ ৩০ আগষ্টত জাৰ্মানীৰ ব্ৰিমেন চহৰত জন্মগ্ৰহণ কৰে যদিও মাক-দেউতাকৰ সৈতে জীৱনৰ প্ৰাৰম্ভিক সময়ছোৱা হাবানাত সাধাৰণ ব্ৰিটিছ ল'ৰা-ছোৱালীৰ দৰে কটাইছিল। মাক-দেউতাকে ঘৰত ইংৰাজী ভাষাত কথা-বতৰা পাতিছিল যাতে তেওঁলোকৰ সন্তানে ইংৰাজীক প্ৰথম ভাষা হিচাপে গ্ৰহণ কৰিব পাৰে। অতি কম বয়সতে পিতৃহাৰা হোৱা ৰঞ্জে মাতৃৰ লগত বন্ধুত্বপূৰ্ণ সম্পৰ্ক গঢ়ি তুলিছিল। মাকৰ তত্ত্বাৱধানত তীক্ষ্ণ বুদ্ধিৰ ৰঞ্জে ১৮৭৫ চনত স্কুলীয়া শিক্ষা সামৰি বিশ্ববিদ্যালয়ত নামভৰ্তিৰ যোগ্যতা অৰ্জন কৰে। বিশ্ববিদ্যালয়ত প্ৰৱেশ কৰাৰ আগৰ ছমাহ তেওঁ মাকৰ লগত ইটালীৰ সাংস্কৃতিক অনুষ্ঠানবোৰৰ লগত জড়িত হৈ আছিল। ইয়াৰ পিছতে তেওঁ মিউনিখ বিশ্ববিদ্যালয়ত সাহিত্য আৰু দৰ্শন অধ্যয়ন কৰিবলৈ লয়। কিন্তু কম দিনৰ ভিতৰতে তেওঁ গণিত আৰু পদাৰ্থবিজ্ঞানৰ প্ৰতি আকৃষ্ট হৈ পৰে আৰু এই দুটা বিষয় অধ্যয়ন কৰিবলৈ লয়।

এইসময়তে তেওঁ মেক্স প্লাংকৰ সহপাঠী হোৱাৰ সূত্ৰে প্লাংকৰ লগত তেওঁৰ এক আন্তৰিক সম্পৰ্ক গঢ় লৈ উঠে। ১৮৭৭ চনৰ শৰৎ কালত ৰঞ্জ আৰু প্লাংকে বাৰ্লিনত গণিত আৰু পদাৰ্থবিজ্ঞান বিষয়ক বক্তৃতামালাত উপস্থিত থাকে। তাত বিখ্যাত গণিতজ্ঞ কাৰ্ল ওৱেৰষ্ট্ৰাছৰ (Karl Weirstrass) ভাষণ শুনাৰ পিছতেই তেওঁ বিশুদ্ধ গণিতৰ প্ৰতি আকৰ্ষিত হৈ পৰে। বিশুদ্ধ গণিত অধ্যয়নৰ মনোনিৱেশ কৰিলেও তেওঁৰ পূৰ্বৰে প্ৰিয় বিষয় দৰ্শনৰ

প্ৰতি তেতিয়াও তেওঁৰ আকৰ্ষণ আছিল। সেয়েহে তেওঁ পিছত দৰ্শনৰ শ্ৰেণীতো অংশগ্ৰহণ কৰিছিল।

১৮৮০ চনৰ ৰঞ্জে বাৰ্লিন বিশ্ববিদ্যালয়ৰ পৰা ডক্টৰেট ডিগ্ৰী গ্ৰহণ কৰে। তেওঁৰ বিষয় আছিল অৱকল জ্যামিতি (Differential geometry) জড়িত। আৰু তেওঁৰ তত্ত্বাৱধায়ক আছিল কাৰ্ল ওৱেৰষ্ট্ৰাছ আৰু এৰনষ্ট কামাৰ (Ernst Kummer)। ইয়াৰ পিছত ৰঞ্জে জাৰ্মানীত শিক্ষকতা কৰাৰ কাৰণে লগা শিক্ষাগত অৰ্হতা সম্পূৰ্ণ কৰি, পুনৰ বাৰ্লিনত গণিতজ্ঞ লিঅ'পল্ড ক্ৰনেকাৰৰ (Leopold Kronecker) সৈতে একেলগে কাম কৰিবলৈ লয়। তেওঁ বীজগণিতীয় সমীকৰণৰ সাংখ্যিক সমাধানৰ সম্পৰ্কত অধ্যয়ন কৰিছিল আৰু এটা পদ্ধতি নিৰ্ণয় কৰিছিল। নিউটন, বাৰ্ণলী আৰু গ্ৰাফেয়ে (Karl Heinrich Gräffe) তেনেকুৱা সমীকৰণৰ সাংখ্যিক সমাধানৰ বাবে দিয়া প্ৰক্ৰিয়াকেইটা ৰঞ্জে দিয়া প্ৰক্ৰিয়াটোৰ বিশেষ ঘটনা হিচাপে উল্লেখ কৰিছিল। তেওঁ ১৮৮৩ চনৰ ফেব্ৰুৱাৰী মাহত দাখিল কৰা পোষ্ট ডক্টৰেল থেচিছখনত এই ফলাফলসমূহ উল্লেখ কৰিছিল।

ইয়াৰ পিছতে ৰঞ্জ আৰু ক্ৰনেকাৰে আন কেইজনমান গণিতজ্ঞৰ সৈতে লগ হৈ বীজগণিত আৰু ফলন তত্ত্বৰ সম্পৰ্কত গৱেষণা কৰিবলৈ লয়। ১৮৮৪ চনৰ ছেপ্টেম্বৰ মাহত ৰঞ্জে ছুইডিছ গণিতজ্ঞ লেফ্লাৰক (Gösta Mittag-Leffler) লগ পাইছিল। তেওঁক লগ পোৱাৰ আগতে ৰঞ্জৰ অতি কম সংখ্যক গৱেষণা-পত্ৰ প্ৰকাশ পাইছিল। কিন্তু লেফ্লাৰক লগ পোৱাৰ পিছত তেওঁৰ পৰা পৰামৰ্শ আৰু অনুপ্ৰেৰণা পাই ১৮৮৫ চনত 'Acta Mathematica' ত ভালেসংখ্যক গৱেষণা-পত্ৰ প্ৰকাশ কৰে।

ৰঞ্জে অধ্যাপনা আৰম্ভ কৰাৰ পিছতে এজন পদাৰ্থ বিজ্ঞানীৰ সংস্পৰ্শ লাভ কৰি তেওঁৰ গৱেষণাৰ ক্ষেত্ৰ বিশুদ্ধ গণিতৰ পৰা পদাৰ্থ বিজ্ঞানলৈ সলনি কৰে। দুয়োৰে যুটীয়া গৱেষণাৰ ফলত সাত বছৰৰ ভিতৰত সাতখন গুৰুত্বপূৰ্ণ গৱেষণা-পত্ৰ প্ৰকাশ কৰে। পৰৱৰ্তী সময়ত তেওঁ আন আন বিজ্ঞানীৰ সৈতে গৱেষণা চলাই যায়। ১৯০৪ চনত তেওঁ গটিঙেন বিশ্ববিদ্যালয়ৰ আমন্ত্ৰণক্ৰমে তাত গণিতৰ অধ্যাপক ৰূপে যোগদান কৰে। তাত তেওঁ গৱেষণাতকৈ পাঠদানত গুৰুত্ব দিছিল। এইজনা মহান গণিতজ্ঞই ১৯২৭ চনৰ ৩ জানুৱাৰীত ইহলীলা সম্বৰণ কৰে।

যদি $(F_n)_{n\geq ১}$ ফিব'নাচ্চি অনুক্ৰম, য'ত $F_১ = F_২ = ১$, তেন্তে

$$\begin{pmatrix} ১ & ১ \\ ১ & ০ \end{pmatrix}^{n+১} = \begin{pmatrix} F_{n+২} & F_{n+১} \\ F_{n+১} & F_n \end{pmatrix}।$$

আকৌ,

$$\begin{pmatrix} ১ & ১ \\ ১ & ০ \end{pmatrix}^{n-১} \begin{pmatrix} G_৩ & G_২ \\ G_২ & G_১ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{n+২} & G_{n+১} \\ G_{n+১} & G_n \end{pmatrix},$$

য'ত $(G_n)_{n\geq ১}$ হ'ল ফিব'নাচ্চি অনুক্ৰমৰ এটা সাধাৰণীকৰণ, যাক গিব'নাচ্চি (Gibonacci) অনুক্ৰম বুলি কোৱা হয়। ইয়াত, $G_১$ আৰু $G_২$ যিকোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, আৰু ২ তকৈ ডাঙৰ সকলো n ৰ বাবে $G_n = G_{n-১} + G_{n-২}$।
এই অনুক্ৰম দুটাক তলৰ সৰল অভেদটোৰে সংযুক্ত কৰিব পাৰি

$$G_n = F_{n-১}G_২ + F_{n-২}G_১, \text{ য'ত } n > ২।$$