সমিল সহগ : এটি গৱেষণা টোকা

হীৰকজ্যোতি দাস

গৱেষক ছাত্ৰ, গণিতবিজ্ঞান বিভাগ, তেজপুৰ বিশ্ববিদ্যালয়, নপাম-৭৮৪০২৮, অসম

গুৰুত্বপূৰ্ণ ঘাত শ্ৰেণীবোৰৰ (Power series) সহগৰ বিষয়ে অধ্যয়ন গণিত গৱেষণাৰ এটা জনপ্ৰিয় শাখা। যোগাত্মক সংখ্যা তত্ত্বৰ (Additive number theory) ক্ষেত্ৰখনতো ভালেকেইজন গৱেষকে বিভিন্ন শ্ৰেণীৰ সহগৰ অধ্যয়নত যথেষ্ট অৱদান আগবঢ়াইছে। এই প্ৰসংগত, লেখকৰ পৰিচিত আৰু সমিল সহগৰ (Matching coefficient) লগত বিশেষভাবে সংগতি থকা এটা বিষয় তলত বৰ্ণোৱা হৈছে। তাৰ বাবে প্ৰয়োজনীয় q-গুণফলৰ (q-product) সংজ্ঞা প্ৰথমে দি লোৱা যাওক। যিকোনো জটিল সংখ্যা a, q, য'ত $|q|<১$, আৰু স্বাভাৱিক সংখ্যা $n \geq ১$ ৰ বাবে, আমি ধৰি লওঁ যে

$$(a;q)_\infty := \prod_{j=০}^{\infty}\left(১-aq^j\right), \qquad f_n := (q^n;q^n)_\infty \text{।}$$

উল্লেখ্য যে $f_১$ ক অইলাৰ গুণফল (Euler product) বুলি কোৱা হয়।

এটা ঘাত শ্ৰেণী $\sum_{n=০}^{\infty} A(n)q^n$ আৰু কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a, b, আৰু সকলো $n \geq ০$ বাবে যদি $A(an+b)=০$ হয়, তেন্তে সকলো $n \geq ০$ ৰ কাৰণে $A(an+b)$ ক ঘাত শ্ৰেণীটোৰ অদৃশ্যমান সহগ (Vanishing coefficient) বুলি কোৱা হয়। ১৯৭৮ চনত পোনপ্ৰথমে অদৃশ্যমান সহগৰ বিষয়ে কৰা গৱেষণাত গণিতজ্ঞ ৰিচ্ছমোণ্ড আৰু যেকেৰ্চে [১২] প্ৰমাণ কৰিছিল যে যদি

$$\sum_{n=০}^{\infty}\alpha(n)q^n = \frac{(q^৩;q^৮)_\infty (q^৫;q^৮)_\infty}{(q;q^৮)_\infty (q^৭;q^৮)_\infty} = \left(\sum_{n=০}^{\infty}\beta(n)q^n\right)^{-১}$$

হয়, তেন্তে সকলো $n \geq ০$ ৰ কাৰণে $\alpha(৪n+৩)=০$ আৰু $\beta(৪n+২)=০$ হ'ব। তেওঁলোকে এয়াও অনুমান কৰিছিল যে যদি

$$\sum_{n=০}^{\infty}\gamma(n)q^n = \frac{(q^৫;q^{১২})_\infty (q^৭;q^{১২})_\infty}{(q;q^{১২})_\infty (q^{১১};q^{১২})_\infty} = \left(\sum_{n=০}^{\infty}\delta(n)q^n\right)^{-১}$$

হয়, তেন্তে সকলো $n \geq ০$ ৰ কাৰণে $\gamma(৬n+৫)=০$ আৰু $\delta(৬n+৩)=০$ হ'ব। মন কৰিবলগীয়া যে $\sum_{n=০}^{\infty}\alpha(n)q^n$ হৈছে বিখ্যাত ৰামানুজন-গোলনিৎজ-গৰ্ডন অবিৰত ভগ্নাংশৰ (Continued fraction) শ্ৰেণী সম্প্ৰসাৰণ (Series expansion)।

মাধ্যমিক পৰ্যায়ৰ বিদ্যালয়-গণিতৰ অনুশীলনীত তেনেই পৰিচিত এটা অবিৰত ভগ্নাংশ হ'ল

$$১ + \cfrac{১}{১ + \cfrac{১}{১ + \cdots}},$$

যাৰ মান $(১ + \sqrt{৫})/২$। ৰামানুজন-গোলনিৎজ-গৰ্ডন অবিৰত ভগ্নাংশ $\mathcal{G}(q)$ ক তলত দিয়া ধৰণেৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হয়:

$$\mathcal{G}(q) := \cfrac{১}{১ + q + \cfrac{q^২}{১ + q^৩ + \cfrac{q^৪}{১ + q^৫ + \cdots}}}।$$

ৰামানুজনে তেওঁৰ দ্বিতীয় টোকাবহীত $\mathcal{G}(q)$ ৰ সমাৰ্থক নিম্নলিখিত গুণফলটো লিপিবদ্ধ কৰিছিল:

$$\mathcal{G}(q) = \frac{(q^৩;q^৮)_\infty (q^৫;q^৮)_\infty}{(q;q^৮)_\infty (q^৭;q^৮)_\infty}।$$

কিন্তু ৰামানুজনৰ কৰ্মৰ অজ্ঞাতে গোলনিৎজ আৰু গৰ্ডনেও উপৰোক্ত সমাৰ্থক গুণফলটো পুনঃআৱিষ্কাৰ কৰে। সেয়েহে $\mathcal{G}(q)$ ক ৰামানুজন-গোলনিৎজ-গৰ্ডন অবিৰত ভগ্নাংশ বুলি জনা যায়।

ঠিক তেনেদৰে, $\sum_{n=০}^{\infty} \gamma(n) q^n$ হ'ল শ্লেটাৰৰ [১৩] ৰ'জাৰ্চ-ৰামানুজন ধৰণৰ ফলনৰ তালিকাত প্ৰকাশিত দুটা ফলন $Y(q)$ আৰু $X(q)$ ৰ ভগ্নাংশ। ফলন দুটাৰ বিষয়ে সবিশেষ জানিবলৈ শ্লেটাৰৰ গৱেষণা-পত্ৰখন [১৩] চাব পাৰে। গতিকে $\alpha(n)$ আৰু $\gamma(n)$ ৰ সম্পৰ্কত বিশদ গৱেষণা – এটা স্বাভাৱিক প্ৰশ্ন।

পৰৱৰ্তী সময়ত এন্দ্ৰুজ আৰু ব্ৰেছোউদে [২] ৰিচ্ছমোণ্ড আৰু যেকেৰ্চৰ অনুমানসমূহ প্ৰমাণ কৰাৰ উপৰি এটা সাধাৰণীকৰণো আগবঢ়াইছিল। যোৱা চাৰিটা দশকত বহুকেইজন গৱেষক যেনে আলাদি আৰু গৰ্ডন [১], মেক্‌লাফ্লিন [৯,১০], হাৰ্চ্চহৰ্ন [৮], টেং [১৪,১৫], বৰুৱা আৰু কৌৰ [৫], দোও আৰু ছ্যাও [৩], চ্ছাৰ্ন আৰু টেং [৬], বন্দনা আৰু কৌৰে [১৬] অদৃশ্যমান সহগযুক্ত যথেষ্ট সংখ্যক q-গুণফল আৱিষ্কাৰ কৰিছে। শেহতীয়াকৈ, চ্ছাৰ্ন আৰু টেঙে [৭] অদৃশ্যমান সহগৰ ক্ষেত্ৰখনত দুটা ৰামানুজন প্ৰাচলকো (Ramanujan parameter) সাঙুৰিবলৈ সক্ষম হৈছে। ৰামানুজন প্ৰাচল হ'ল ৰ'জাৰ্চ-ৰামানুজন অবিৰত ভগ্নাংশ জড়িত কিছুমান নিৰ্দিষ্ট গুণফল। ৰ'জাৰ্চ-ৰামানুজন অবিৰত ভগ্নাংশ $R(q)$ ক তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হয়:

$$R(q) := \cfrac{১}{১ + \cfrac{q}{১ + \cfrac{q^২}{১ + \cdots}}}।$$

প্ৰকৃততে $q^{১/৫}R(q)$ ক হে ৰ'জাৰ্চ-ৰামানুজন অবিৰত ভগ্নাংশ বুলি কোৱা হয়। কিন্তু অধ্যয়নৰ সুবিধাৰ্থে বহুতে $q^{১/৫}$ উৎপাদকটোক বিবেচনা নকৰে। এই অবিৰত ভগ্নাংশটো বিখ্যাত ৰ'জাৰ্চ-ৰামানুজন ফলন $G(q)$ আৰু $H(q)$ ৰ লগত তলত দিয়া ধৰণেৰে সম্পৰ্কিত:

$$R(q) = \frac{H(q)}{G(q)},$$

য'ত

$$G(q) := \sum_{n=০}^{\infty} \frac{q^{n^২}}{(q,q)_n}, \qquad H(q) := \sum_{n=০}^{\infty} \frac{q^{n^২+n}}{(q,q)_n}।$$

এইখিনিতে পাঠকৰ জ্ঞাতাৰ্থে উল্লেখ কৰা হ’ল যে ঘাত শ্ৰেণীৰ অদৃশ্যমান সহগ আৰু $G(q)$ আৰু $H(q)$ ৰ মাপাংকীয় সম্পৰ্কবোৰ (Modular relation) ঘাত শ্ৰেণীৰ সমিল সহগ অধ্যয়নৰ অন্যতম কাৰক। এই বিষয়ে তলত এটা আভাস দিয়া হ’ব। এতিয়া আমি এই টোকাটোৰ প্ৰধান বিষয় সমিল সহগৰ সংজ্ঞা জানো আহক।

দুটা ভিন্ন ঘাত শ্ৰেণী $\sum_{n=০}^{\infty} A(n)q^n$ আৰু $\sum_{n=০}^{\infty} B(n)q^n$ ৰ ক্ষেত্ৰত, কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a, c, আৰু k, অঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা b আৰু d, আৰু সকলো $n \geq ০$ ৰ বাবে যদি $A(an+b) = \pm kB(cn+d)$ হয়, তেন্তে $\sum_{n=০}^{\infty} A(n)q^n$ আৰু $\sum_{n=০}^{\infty} B(n)q^n$ ক সমিল সহগযুক্ত ঘাত শ্ৰেণী বুলি কোৱা হয়। আৰু সকলো $n \geq ০$ ৰ কাৰণে $A(an+b)$ অথবা $B(cn+d)$ ক ঘাত শ্ৰেণী দুটাৰ সমিল সহগ বুলি কোৱা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, তলৰ শ্ৰেণী দুটা বিবেচনা কৰা হওক।

$$\begin{aligned}
\sum_{n=০}^{\infty} A(n)q^n :=& ১ - ৫q + ১৫q^{২} - ৩০q^{৩} + ৪০q^{৪} - ২৬q^{৫} - ৩০q^{৬} + ১২৫q^{৭} - ২২০q^{৮} \\
&+ ২৪৫q^{৯} - ১২৪q^{১০} - ১৮০q^{১১} + ৬১৫q^{১২} - ১০১০q^{১৩} + ১০৮৫q^{১৪} - ৫৫০q^{১৫} \\
&- ৭০৫q^{১৬} + ২৪১৫q^{১৭} - ৩৮৫০q^{১৮} + ৩৯৮০q^{১৯} - ১৯২৬q^{২০} - ২৪৬০q^{২১} \\
&+ ৮০৯০q^{২২} + \cdots \\
\sum_{n=০}^{\infty} B(n)q^n :=& ১ + ৫q + ১০q^{২} + ৫q^{৩} - ১৫q^{৪} - ২৪q^{৫} + ১৫q^{৬} + ৭০q^{৭} + ৩০q^{৮} \\
&- ১২৫q^{৯} - ১৭৫q^{১০} + ৯৫q^{১১} + ৪২০q^{১২} + ১৮০q^{১৩} - ৬১৫q^{১৪} - ৮২৬q^{১৫} \\
&+ ৪১০q^{১৬} + ১৭৬০q^{১৭} + ৭০৫q^{১৮} - ২৪১৫q^{১৯} - ৩১০০q^{২০} + ১৫৩০q^{২১} \\
&+ ৬২৭০q^{২২} + ২৪৬০q^{২৩} - ৮০৯০q^{২৪} + \cdots
\end{aligned}$$

উপৰোক্ত বিস্তাৰ দুটা ৰ’জাৰ্চ-ৰামানুজন অবিৰত ভগ্নাংশ আৰু ইয়াৰ প্ৰতিক্ৰমৰ (Reciprocal) পঞ্চম ঘাত, ক্ৰমে $R^{৫}(q)$ আৰু $১/R^{৫}(q)$ ৰ শ্ৰেণী সম্প্ৰসাৰণ। ইয়াত স্পষ্টকৈ দেখা গৈছে যে $০ \leq n \leq ৪$ ৰ বাবে $A(৫n+২) = -B(৫n+৪)$, যিটো প্ৰকৃততে সকলো $n \geq ০$ ৰ ক্ষেত্ৰতেই সত্য। গতিকে আমি ১৫, ১২৫, ৬১৫, ২৪১৫, ৮০৯০,... নাইবা -১৫, -১২৫, -৬১৫, -২৪১৫, -৮০৯০,... বোৰক উপৰোক্ত ঘাত শ্ৰেণী দুটাৰ সমিল সহগ বুলি কওঁ।

গণিতজ্ঞ য়াকবিৰ (Jacobi) এটা বিখ্যাত অভেদৰ (Identity) জৰিয়তে ঘাত শ্ৰেণীৰ সমিল সহগলৈ বুলি অন্য এটা অভিগমন (Approach) অতি চমু আৰু সহজকৈ আগবঢ়াব পাৰি। কিন্তু আমাৰ শেহতীয়া এখন গৱেষণা-পত্ৰৰ (বৰুৱা আৰু দাস [৪]) অতি আকৰ্ষণীয় ফলাফলখিনি ঘাত শ্ৰেণীৰ অদৃশ্যমান সহগৰ দ্বাৰা অনুপ্ৰেৰিত আৰু ৰ’জাৰ্চ-ৰামানুজন ধৰণৰ ফলনৰ ন-পুৰণি মাপাংকীয় সম্পৰ্ক, ৰামানুজনৰ থেটা ফলন (Theta function) জড়িত অভেদ, ইত্যাদিৰে প্ৰতিষ্ঠিত। এইসমূহৰ লগত সংগতি ৰাখি, সমিল সহগ আৱিষ্কাৰ কৰা এটা উপায়ৰ আভাষ তলত দিয়া হৈছে।

ৰামানুজনে যেতিয়া ৰ’জাৰ্চ-ৰামানুজন অভেদ দুটা প্ৰমাণ কৰি গৱেষণা-পত্ৰ এখন [১১] প্ৰকাশৰ বাবে যোগাযোগ কৰিছিল, সেই পত্ৰখনত প্ৰমাণ অবিহনে তেওঁ এয়াও লিখিছিল– “*মই এতিয়া $G(q)$ আৰু $H(q)$ ৰ মাজত এটা বীজগণিতীয় সম্পৰ্ক বিচাৰি*

পাইছোঁ, সেয়া হ'ল:

$$G^{১১}(q)H(q) - q^{২}G(q)H^{১১}(q) = ১ + ১১qG^{৬}(q)H^{৬}(q)।$$

আন এটা লক্ষণীয় সূত্ৰ হ'ল

$$G\left(q^{১১}\right)H(q) - q^{২}G(q)H\left(q^{১১}\right) = ১।$$

এই সূত্ৰবোৰৰ প্ৰতিটোৱেই একোটা ডাঙৰ শ্ৰেণীৰ আটাইতকৈ সৰলতমটো।" ৰামানুজনে এনেধৰণৰ চল্লিছটা মাপাংকীয় অভেদ আগবঢ়াইছিল। শত বছৰ পাছতো এই অভেদবোৰ গৱেষণাৰ বাবে প্ৰেৰণাৰ উৎস হৈ আছে। তাৰে বহু উদাহৰণৰ ভিতৰত, আমি (বৰুৱা আৰু দাস [৪]) তলৰ সম্পৰ্কটো আৱিষ্কাৰ কৰিছোঁ।

$$G^{৩}\left(q^{২}\right)H\left(q\right) + qG\left(q\right)H^{৩}\left(q^{২}\right) = \frac{f_{২}f_{১০}^{৯}}{f_{১}f_{৪}f_{৫}^{৫}f_{২০}^{৩}} + ৪q^{২}\frac{f_{৪}f_{২০}^{৩}}{f_{২}^{২}f_{৫}^{২}}।$$

এই মাপাংকীয় অভেদটোৱে আমোদজনকভাবে এটা ৰামানুজন প্ৰাচল $R(q)R^{২}\left(q^{২}\right)$ আৰু তাৰ প্ৰতিক্ৰম জড়িত মাপাংকীয় সম্পৰ্ক এটা উলিওৱাত ঘাই ভূমিকা লয়। সেই সম্পৰ্কটো হৈছে

$$\frac{১}{R(q)R^{২}(q^{২})} + q^{২}R(q)R^{২}(q^{২}) = \frac{f_{২}^{৩}f_{১০}^{৫}}{f_{১}f_{৪}f_{৫}^{৩}f_{২০}^{৩}} + ৪q^{২}\frac{f_{৪}f_{২০}^{৩}}{f_{১০}^{৪}}।$$

এতিয়া আমি যদি দেখুওৱাব পাৰোঁ যে সকলো $n \geq ০$ ৰ বাবে উপৰোক্ত অভেদটোৰ সোঁফালে থকা ৰাশিটোৰ শ্ৰেণী বিস্তাৰত q^{an+b} ৰ সহগবোৰ অদৃশ্যমান অৰ্থাৎ শূন্য, তেতিয়া বাওঁফালৰ পৰা আমি পাম যে, $\dfrac{১}{R(q)R^{২}(q^{২})}$ ৰ শ্ৰেণী বিস্তাৰত q^{an+b} ৰ সহগবোৰ, $R(q)R^{২}(q^{২})$ ৰ শ্ৰেণী বিস্তাৰত $q^{an+b-২}$ ৰ সহগবোৰৰ সৈতে মান সমান কিন্তু পৰস্পৰ বিপৰীত চিহ্নযুক্ত। এই ব্যাখ্যাখিনিয়ে নিশ্চয়কৈ $R(q)R^{২}(q^{২})$ আৰু তাৰ প্ৰতিক্ৰমৰ কিছুমান সমিল সহগ দিব।

এতিয়া সমিল সহগ সম্বন্ধীয় সদ্য আৱিষ্কৃত কেইবাটাও উপপাদ্যৰ মাজৰে এটা নিৰ্দিষ্ট উপপাদ্য উল্লেখ কৰা হওক। উপপাদ্যটো উপস্থাপনৰ সুবিধাৰ্থে, আমি ধৰি লওঁ যে যদি $A(n)$ এ কোনো এটা ঘাত শ্ৰেণীৰ n তম সহগক সূচায়, তেন্তে $A'(n)$ এ প্ৰতিক্ৰম শ্ৰেণীটোৰ n তম সহগক সূচাব।

উপপাদ্য ১. (বৰুৱা আৰু দাস [৪]) *ধৰা হ'ল*

$$\sum_{n=০}^{\infty}\lambda_{১}(n)q^{n} = \frac{১}{R^{৫}\left(q\right)}, \qquad \sum_{n=০}^{\infty}\lambda_{২}(n)q^{n} = \frac{R^{৫}\left(q\right)}{R\left(q^{৫}\right)},$$

$$\sum_{n=০}^{\infty}\lambda_{৩}(n)q^{n} = \frac{R\left(q^{২}\right)}{R^{২}\left(q\right)}, \qquad \sum_{n=০}^{\infty}\lambda_{৪}(n)q^{n} = \frac{১}{R\left(q\right)R^{২}\left(q^{২}\right)},$$

$$\sum_{n=০}^{\infty}\lambda_{৫}(n)q^{n} = \frac{১}{R\left(q\right)R\left(q^{৪}\right)}, \qquad \sum_{n=০}^{\infty}\lambda_{৬}(n)q^{n} = \frac{১}{R\left(-q\right)R\left(-q^{৪}\right)},$$

$$\sum_{n=০}^{\infty}\lambda_{৭}(n)q^{n} = \frac{R\left(q^{৪}\right)}{R^{৪}\left(q\right)}, \qquad \sum_{n=০}^{\infty}\lambda_{৮}(n)q^{n} = \frac{R^{২}\left(q\right)}{R^{৩}\left(q^{৪}\right)},$$

$$\sum_{n=০}^{\infty}\lambda_{৯}(n)q^{n} = \frac{R\left(q\right)}{R\left(q^{১৬}\right)}, \qquad \sum_{n=০}^{\infty}\lambda_{১০}(n)q^{n} = \frac{R\left(q^{৪}\right)}{R^{২}\left(q\right)R\left(q^{২}\right)}।$$

তেন্তে, যিকোনো $n \geq ০$ ৰ বাবে, আমি পাওঁ যে

$$
\begin{aligned}
\lambda_{১}(৫n+r) &= -\lambda'_{১}(৫n+r-২), \quad r \in \{৩, ৪\};\\
\lambda_{২}(৫n) &= \lambda'_{২}(৫n);\\
\lambda_{৩}(৫n+r) &= -\lambda'_{৩}(৫n+r), \quad r \in \{১, ৪\};\\
\lambda_{৪}(৫n+r) &= -\lambda'_{৪}(৫n+r-২), \quad r \in \{৩, ৪\};\\
\lambda_{৫}(৫n+r) &= \lambda'_{৫}(৫n+r-২), \quad r \in \{৩, ৪\};\\
\lambda_{৬}(১০n+r) &= \lambda'_{৬}(১০n+r-২), \quad r \in \{৫, ৭\};\\
\lambda_{৭}(১০n+r) &= -\lambda'_{৭}(১০n+r), \quad r \in \{১, ৯\};\\
\lambda_{৮}(১০n+r) &= -\lambda'_{৮}(১০n+r-৪), \quad r \in \{৫, ৯\};\\
\lambda_{৯}(১০n+r) &= \lambda'_{৯}(১০n+r-৬), \quad r \in \{৭, ৯\};\\
\lambda_{১০}(২n+r) &= (-১)^r \lambda'_{১০}(২n+r), \quad r \in \{০, ১\};\\
\lambda_{১০}(৫n+r) &= \lambda'_{১০}(৫n+r), \quad r \in \{২, ৩\}।
\end{aligned}
$$

‘ৰামানুজন জাৰ্নেল’ত (The Ramanujan Journal) শেহতীয়াকৈ (৪ জানুৱাৰী, ২০২২) প্ৰকাশিত গৱেষণা-পত্ৰখনত [৪] পঢ়ুৱৈসকলে সমিল সহগযুক্ত ঘাত শ্ৰেণীৰ বিষয়ে প্ৰমাণসহ অধিক জানিবলৈ পাব। অষ্ট্ৰিয়াৰ ভিয়েনা বিশ্ববিদ্যালয়ৰ প্ৰাধ্যাপক মাইকেল শ্লোছাৰে ব্যক্তিগত যোগাযোগৰ জৰিয়তে আমাৰ পত্ৰখনত কেইটামান অনুমান আগবঢ়াইছে। তাৰে ভিতৰত এটা হ’ল, যদি

$$\sum_{n=০}^{\infty} \omega_{২১}(n)q^n = \frac{(q^২;q^{২১})_\infty (q^৮;q^{২১})_\infty (q^{১০};q^{২১})_\infty (q^{১১};q^{২১})_\infty (q^{১৩};q^{২১})_\infty (q^{১৯};q^{২১})_\infty}{(q;q^{২১})_\infty (q^৪;q^{২১})_\infty (q^৫;q^{২১})_\infty (q^{১৬};q^{২১})_\infty (q^{১৭};q^{২১})_\infty (q^{২০};q^{২১})_\infty}$$

হয়, তেন্তে যিকোনো $n \geq ০$ ৰ বাবে, আমি পাম যে

$$\omega_{২১}(২১n+r) = \omega'_{২১}(২১n+r-৪), \qquad r \in \{৪, ৬, ১০, ১১, ১৩, ১৭, ১৮, ২০, ২৪\}।$$

এই অনুমানটোৰ প্ৰমাণ যথেষ্ট প্ৰত্যাহ্বানমূলক হ’ব বুলি আমি ধাৰণা কৰোঁ। ইয়াৰ প্ৰমাণে নিশ্চয় বিষয়টো সম্পৰ্কীয় নতুন দিশ উন্মুক্ত কৰিব।

অসীম শ্ৰেণীৰ সমিল সহগ সম্বন্ধীয় অধ্যয়নৰ এয়া মাথোঁ আৰম্ভণিহে। ভৱিষ্যতে আৰু ন ন দিশ উন্মোচিত হোৱাৰ যথেষ্ট থল আছে।

তথ্যসূত্ৰ

[১] K. Alladi, B. Gordon, Vanishing coefficients in the expansion of products of Rogers–Ramanujan type, In: Proceedings of Rademacher Centenary Conference, Contemporary Mathematics ১৬৬, ১২–১৩৯ (১৯৯৪).

[২] G. E. Andrews, D. M. Bressoud, Vanishing coefficients in infinite product expansions, Journal of the Australian Mathematical Society, Series A ২৭(২), ১৯৯–২০২ (১৯৭৯)

[৩] D. Q. J. Dou, J. Xiao, The 5-dissections of two infinite product expansions, The Ramanujan Journal ৫৪, ৪৭৫–৪৮৪ (২০২১)

[৪] N. D. Baruah, H. Das, Matching coefficients in the series expansions of certain q-products and their reciprocals, The Ramanujan Journal (২০২২), DoI: 10.1007/s11139-021-00534-4

[৫] N. D. Baruah, M. Kaur, Some results on vanishing coefficients in infinite product expansions, The Ramanujan Journal ৫৩, ৫৫১–৫৬৮ (২০২০)

[৬] S. Chern, D. Tang, Vanishing coefficients in quotients of theta functions of modulus five, Bulletin of the Australian Mathematical Society ১০২(৩), ৩৮৭–৩৯৮ (২০২০)

[৭] S. Chern, D. Tang, Vanishing coefficients and identities concerning Ramanujan's parameters, The Ramanujan Journal (২০২১), DoI: 10.1007/s11139-021-00385-z

[৮] M. D. Hirschhorn, Two remarkable q-series expansions, The Ramanujan Journal ৪৯(২), ৪৫১–৪৬৩ (২০১৮)

[৯] J. McLaughlin, Further results on vanishing coefficients in infinite product expansions, Journal of the Australian Mathematical Society, Series A ৯৮(১), ৬৯–৭৭ (২০১৫)

[১০] J. McLaughlin, New infinite q-product expansions with vanishing coefficients, The Ramanujan Journal ৫৫, ৭৩৩–৭৬০ (২০২১)

[১১] S. Ramanujan, Algebraic relations between certain infinite products, Proceedings of the London Mathematical Society ২, p. xviii (১৯২০).

[১২] B. Richmond, G. Szekeres, The Taylor coefficients of certain infinite products, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) ৪০(৩–৪), ৩৪৭–৩৬৯ (১৯৭৮)

[১৩] L. J. Slater, Further identities of the Rogers-Ramanujan type, Proceedings of the London Mathematical Society ৫৪, ১৪৭–১৬৭ (১৯৫২)

[১৪] D. Tang, Vanishing coefficients in some q-series expansions, International Journal of Number Theory ১৫(৪), ৭৬৩–৭৭৩ (২০১৯)

[১৫] D. Tang, Vanishing coefficients in four quotients of infinite product expansions, Bulletin of the Australian Mathematical Society ১০০(২), ২১৬–২২৪ (২০১৯)

[১৬] Vandna, M. Kaur, Vanishing Coefficients of q^{5n+r} and q^{11n+r} in Certain Infinite q-Product Expansions, Annals of Combinatorics (২০২১), DoI: 10.1007/s00026-021-00560-5

"চাকৰি বিচাৰি মই ১২০ খন দৰ্খাস্ত লিখিছিলোঁ আৰু আটাইকেইখন প্ৰেৰণ কৰিছিলোঁ। তাৰে দুখনৰ উত্তৰ আহিছিল, আৰু দুয়োখনৰে উত্তৰটো আছিল— "নহ'ব"।"

– পল হেলমছ

গণিত বিষয়ক বিখ্যাত লেখক আৰু গণিতজ্ঞ। ইনষ্টিটিউট ফৰ এডভান্সড ষ্টাডিত (IAS) মহান গণিতজ্ঞ জন ভন নয়মেনৰ সহযোগী হিচাপেও তেওঁ কাম কৰিছিল।