কলাকাৰ আৰু গণিতজ্ঞ : এজন অস্তিত্বহীন অতি-প্ৰতিভাৱান গণিতজ্ঞ নিক'লা বহবাকীৰ কথা

৮ম অধ্যায় : বহবাকীৰ সাফল্যখিনি

আমিৰ এক্‌জেল • অনুবাদ : ড° খনীন চন্দ্ৰ চৌধুৰী

অনুবাদক: এমেৰিতাছ প্ৰফেছৰ, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়

(*আমিৰ এক্‌জেলৰ (Amir Dan Aczel) 'The Artist and the Mathematician: The Story of Nicolas Bourbaki, the Genius Mathematician Who Never Existed' গ্ৰন্থৰ অনুবাদ।*)

আৰম্ভ কৰিছোঁ ফৰাছী গণিত-ইতিহাসবিদ ডেনি গেড়্‌জৰ কথা এশাৰীৰে:

গণিতৰ ঐক্যৰ ওপৰত থকা গভীৰ বিশ্বাসখিনিৰে অনুপ্ৰাণিত হৈ আৰু এগৰাকী 'সাৰ্বিক গণিতজ্ঞ' হোৱাৰ ইচ্ছা কৰি বহবাকীয়ে দায়িত্ব লৈছিল সমগ্ৰ গাণিতিক জগতখনক এটা একক আৰম্ভণ বিন্দুৰ পৰা পাবলৈ বুলি।

সেই আৰম্ভণি বিন্দুটো আছিল সংহতি তত্ত্ব।

পঁচিশ শতিকাৰ আগেয়ে ইউক্লিডে তেওঁৰ সমগ্ৰ 'এলিমেণ্টছ'ক ভেঁটি কৰিছিল বিন্দু, ৰেখা, বৃত্ত, আৰু আন জ্যামিতীয় ধাৰণাক লৈ। আৰু এই ভেঁটিৰ ওপৰতেই তেওঁ সাজিছিল গণিত প্ৰণালীৰ সৌধটো। বহবাকীয়ে বিচাৰিছিল তেওঁলোকৰ গণিতৰ নিজা প্ৰণালীক একেদৰেই যদি ইউক্লিডৰেই লেখীয়া কৰি লৈ আগবাঢ়িব পৰা হয়। তেওঁলোকৰ ঘোষিত লক্ষ্য আছিল ইউক্লিডৰ এলিমেণ্টছৰ দৰে এটা নতুন সমষ্টি, যি পৰৱৰ্তী ২০০০ বছৰ জুৰি টিকে। এই উদ্যম তথা সাহসতেই তেওঁলোকে প্ৰকাশ কৰিবলৈ খোজা নিজৰ কিতাপলানিৰ নাম ৰাখিছিল– 'Elements de mathématique'। লক্ষ্যণীয় যে, ইচ্ছাপূৰ্বক তেওঁলোকে বানানটো কৰিছিল 'মেথেমেটিক'। 'চ'টো এৰি একবচন কৰি লৈছিল, ফৰাছীত ' mathématique'। সেয়া আছিল সাধাৰণতে কৰা 'মেথেমেটিক্স' (mathmatiques) অৰ বিপৰীতে। এই নতুনত্ব থকা নতুন শব্দটো লৈছিল গণিতৰ 'ঐক্য'ক (unity) গুৰুত্ব আৰোপ কৰিবলৈ। তেওঁলোকৰ কিতাপলানি– 'এলিমেণ্টচ'ক স্বীকাৰ্যভিত্তিক কৰি লিখিবলৈ তেওঁলোকে কঠোৰ চেষ্টা কৰিছিল। এক দিগন্ত ৰাখিছিল, সম্পূৰ্ণ গৃহীত ৰূপৰ বা 'ফৰমেলাইজেছন'ৰ। লক্ষ্য আছিল যাতে এই গ্ৰন্থখন এক পূৰ্ণশুদ্ধ সুশৃংখল আৰু সতৰ্ক চৰিত্ৰৰ হয়।

গেড়্‌জে লক্ষ্য কৰিছে যে ইতিহাসত বহবাকী দলটোৱেই প্ৰথম নাছিল– এনে এক উচ্চাভিলাসী প্ৰকল্প লৈ আগবাঢ়িব খোজা। কিন্তু এই লক্ষ্যক উপলব্ধি কৰি ইমান অগ্ৰসৰ হৈ আগবাঢ়ি যোৱা তেওঁলোকেই একমাত্ৰ আছিল। তেওঁলোকৰ লক্ষ্যক আগুৱাই নিবলৈ বুলি বহবাকী দলটোৱে দুটা শক্তিশালী পদ্ধতি লৈছিল। এটা আছিল 'স্বীকাৰ্যকৰণ' (axiomatization) পদ্ধতি, আৰু আনটো আছিল 'গাঁথনি' বা 'সংগ্ৰথন'ৰ (structure) সাধাৰণ ধাৰণাটো। স্বীকাৰ্যকৰণৰ ধাৰণাটো তেওঁলোকে প্ৰত্যক্ষভাৱে লৈছিল ইউক্লিডৰ পৰা – পাছলৈ জাৰ্মান গণিতজ্ঞ ডেভিড হিলবাৰ্ট আৰু আনসকলে আগুৱাই লৈ যোৱাৰ দৰে। কিন্তু দ্বিতীয় ধাৰণাটো – গণিতত প্ৰয়োগ কৰিব বিচৰা সংগ্ৰথনৰ গুৰুত্বপূৰ্ণ ধাৰণা এটা – বহবাকীয়ে আৱিষ্কাৰ কৰিবলগীয়া

হৈছিল। এইটোক কুৰি শতিকাৰ গণিতৰ এটা অতি ধুনীয়া ৰত্ন হিচাপে অভিহিত কৰা হৈছিল।

ক্লড চিভাল্লীৰ মতে, বহবাকীৰ আন এটা অভিযোজন আছিল, আপ্তবাক্য তুল্য সেই নীতিটো– "গণিতৰ প্ৰতিটো সত্যৰেই একোটা ব্যাখ্যা থাকিব লাগিব।" এই নীতিটো 'ক'জেলিটি' বা 'কাৰণ'ৰ নীতিৰ ধাৰণাৰ পৰা ভিন্ন। অৰ্থাৎ কোনো এটা সংঘটন, আন এটাৰ ফলশ্ৰুতি। বহবাকীৰ মতে "কোনো এটা কথা, যিটো এক হিচাপ বা 'কেলকুলেছন'ৰ ফলত আহিছে, তাক আমি এটা ভাল প্ৰমাণ বুলি নলওঁ।"

ওপৰত উল্লেখ কৰা গোটেইকেইটা নীতিয়েই গণিতত অতি কামত অহা বিধৰ আৰু গুৰুত্বপূৰ্ণ। আৰু প্ৰতিটো সত্যৰে একোটা ব্যাখ্যা অবিহনে, শৃংখলাটোৰ একোটা স্বীকাৰ্যভিত্তিক ভেঁটি অবিহনে আৰু সংগ্ৰথনৰ মাজত নিহিত হৈ ৰোৱা ধাৰণা অবিহনে আমি আধুনিক গণিতক ভাবিব নোৱাৰোঁ। পিছে এই শেষৰ নীতিটো, ইয়াৰ গুৰুত্বৰ ফালৰ পৰা একক বৈশিষ্ট্যৰ, আৰু ই আন সকলোকে অতিক্ৰমি যায়। ইয়াৰ মাজত নিহিত হৈ ৰোৱা কাৰণটো হৈছে এনেধৰণৰ: আমি জানো যে ভাষাবিজ্ঞানত উদ্ভৱ হৈছে বা ইয়াৰে পৰা আহিছে 'গাঁথনি' বা 'সংগ্ৰথন'ৰ ধাৰণাটো। ই গণিতৰ পৰিসৰ বা সীমনাক চেৰাই যোৱা। শাহভাগত, এই ধাৰণাটো এটা গাণিতিক ধাৰণাহে। বহবাকীয়ে ইয়াক লৈ আহিছিল গাণিতিক চিন্তাৰ সমুখভাগলৈ বুলি। পিছে ধাৰণাটো বিজ্ঞান আৰু মানৱ চিন্তাৰ পদ্ধতিত ইমানেই শক্তিশালী আৰু মৌলিক যে বাস্তৱত ইয়াৰ প্ৰয়োগ মানৱৰ কামত অহা প্ৰতিটো বিভাগতেই পোৱা যায়। প্ৰকৃততে, সংগ্ৰথনৰ ধাৰণাই, মানৱ চিন্তা আৰু মানৱ দৰ্শনত এক সামগ্ৰিক বিপ্লৱ আনিছিল। বহবাকী আছিল এই ধাৰণাটোৰ প্ৰধান প্ৰবক্তা আৰু ইয়াক কৰি লৈছিল মানৱ চিন্তাৰ সৰ্বব্যাপন-আমঠু যেন কৰি।

এতিয়া আলোচনা কৰা হওক– 'সংগ্ৰথন' বোলা ধাৰণাটোৰ গাণিতিক অত্যাৱশ্যকীয়খিনিনো কি?

বহবাকীয়ে বিকাশ ঘটাইছিল কিছু সংখ্যক "মাতৃ সংগ্ৰথনক" আৰু দলটোৱে এই নামেই দিছিল। ইয়াৰে দুটা আছিল 'নিকটৱৰ্তী' বা 'সামীপ্য'ৰ ধাৰণা আৰু 'সংঘ' বা 'গ্ৰুপ'ৰ'। নিকটৱৰ্তী বা সামীপ্যৰ বা 'নেইবাৰহুড'ৰ ধাৰণাটো আহিছিল গাণিতিক ক্ষেত্ৰখনৰ সংস্থিতি-জ্ঞানৰ (topolgy) পৰা। ইয়াতেই আমি প্ৰতিবেশী বা সমীপ বা সামীপ্যৰ ধাৰণাৰ অধ্যয়ন কৰোঁ। দুটা বিন্দুৰ "নিকটৱৰ্তীতাক" সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰাৰ সুনিৰ্দিষ্ট ধাৰণা আছে। আৰু বহবাকীয়ে সাজিছিল এইসমূহ সৰ্বোচ্চ গুৰুত্বপূৰ্ণ ধাৰণাক তথা নিকটৱৰ্তীতাক সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰিবলৈ বুলি। এইবোৰ ধাৰণা বিমূৰ্ত, আৰু তথাপি এইবোৰৰ প্ৰয়োগ আছে মনোবিজ্ঞানত, উদাহৰণস্বৰূপে শিক্ষাতত্ত্বত। এজন মনোবিজ্ঞানীয়ে জানিবলৈ বিচাৰিব পাৰে যে "এটা বক্ৰ" আৰু "এডাল সৰলৰেখা" "নিকট" ধাৰণাৰ হয় নে নহয়। ইয়াত অৰ্ধ-গাণিতিক ধাৰণা নিকটৱৰ্তীতাৰ সংস্থিতীয় ধাৰণা জড়িত হ'ব পাৰে।

সংঘ একোটাৰ ধাৰণাটো বহবাকী দলটোৰ কাৰণে এটা বিশেষ গুৰুত্ব পাবলগীয়া হিচাপে লৈছিল। কাৰণ, যিটো ভাগত এইখিনি আছিল, সেয়া প্ৰধানকৈ বিমূৰ্ত বীজগণিতৰ ভিতৰত পৰিছিল আৰু ই এই দলটোৰ কেইবাগৰাকী সদস্যৰেই প্ৰিয় গৱেষণাৰ বিষয় আছিল। বহবাকীয়ে সংঘতত্ত্বৰ কাম হাতত লোৱা সময়ত এই তত্ত্ব ইতিমধ্যে শ-বছৰ পাৰ হৈছিল। ইয়াৰ উদ্ভাৱন হৈছিল ওঠৰ শতিকাৰ পাছৰফালে। ইয়াক প্ৰসাৰ লাভ কৰাইছিল এভাৰিষ্ট গেলৱাই– প্ৰায় ১৮৩০ ৰ ফালে। তাকো, এই কুৰি বছৰীয়া প্ৰতিভাধৰে দুখজনকভাৱে দ্বন্দ্ব যুঁজত ঠিক মৃত্যুক আঁকোৱালি লোৱাৰ আগেয়ে। ১২৩ এই সংখ্যাটোৰ অংককেইটা মন কৰিলে আমি পাওঁ যে ইহঁতৰ ভিন ভিন ক্ৰমকেইটাই এটা দল বা সংঘ বা গ্ৰুপ গঠন কৰে। ইয়াকেই কোৱা হয় n-সংখ্যক মৌলৰ বিন্যাস-দল বা ইংৰাজীত 'পাৰ্মুটেছন গ্ৰুপ অফ্ n এলিমেণ্টচ (ইয়াত $n=$ ৩)। এই সংঘটোৰ মৌলকেইটা হৈছে **১২৩, ১৩২, ২১৩, ২৩১, ৩১২,** আৰু **৩২১**। সেয়ে এই সংঘটোৰ ছয়টা সুস্পষ্ট মৌল আছে। পিছে আমোদৰ কথাখিনি এয়ে যে এই সংঘটো আন আন ভিন ৰূপতো দেখা দিয়ে।

বিমূৰ্ত সংঘ এটাৰ ধাৰণাটো এনেধৰণৰ যে– "ইনো কেনেধৰণৰ বাস্তৱ পৰিস্থিতিক সূচায়, সেই বিষয়ত একো নকয়, বা সংঘটো ক'ৰ পৰানো আহি পৰিল সেই প্ৰায়োগিক পৰিস্থিতিটোৰ প্ৰতি একো নিৰ্দেশনাক নুসূচায়। ইয়াত ভবা হয় মাথোন সংঘটোৰ অন্তৰ্নিহিত সংগ্ৰথনটোক"হে।

বহবাকীয়ে "সংগ্ৰথন" বোলা এই ধাৰণাটোৰ ওপৰত বিশেষ গুৰুত্ব আৰোপ কৰিছিল। ওপৰৰ সংঘটোৰ অন্তঃপ্ৰকৃতিটো "সংগ্ৰথন"টোৰ বুনিয়াদী-মৌল। ই সম্পূৰ্ণকৈ স্বকীয়ভাৱে অহা, লাগিলে য'ৰ পৰা এই সংঘটো উদ্ভৱ হওক– ই এটা ত্ৰিভুজেই হওক বা সংখ্যায়েই হওক বা সমীকৰণৰ সমাধান এটায়েই হওক। আৰু ইয়াকে লৈয়ে বহবাকীৰ 'সতৰ্কতা' বা 'আপডাল'। "সংগ্ৰথন"ক লীন-সংকেত, নীতি বা প্ৰতীকবাদ হিচাপে, এক বিশেষ পৰিস্থিতিত গাণিতিকভাৱে কিনো হৈ আছে, তাক পাবলৈ বুলি, এনেদৰে পাব পাৰি। পৰিস্থিতিটোনো কি সেই বিষয়ে বহবাকী চিন্তিত নহয়। কথাটো হৈছে সংকেত বা প্ৰতীকবাদটো, লীন-সজ্জাটো – এইখিনিহে আছিল এই গণিতজ্ঞকেইজনৰ

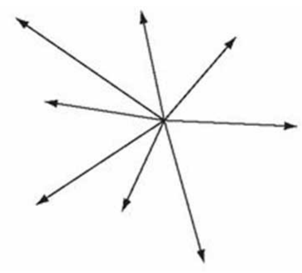
মনোযোগৰ বিষয়।

মন কৰিবলগীয়া যে "সংগ্ৰথন"ৰ ধাৰণা বহবাকীৰ আৱিষ্কাৰ নহয়। ই আগৰে পৰা আছিল ভাষাবিজ্ঞানৰ অগণিতীয় প্ৰেক্ষাপটত। বহবাকীয়ে সজ্জাৰ লগত কাম কৰি থাকোঁতে, ধাৰণাটো বিয়পি পৰে নৃতত্ত্বলৈ, আৰু তাৰে পৰা মনোবিজ্ঞানলৈ, আৰু শেষত পুনৰ ভাষাবিজ্ঞানৰ মাজেৰে আহি পৰে সাহিত্যলৈ বুলি – যিটো এনে এটা বিভাগ, য'ত কোনোবাই বিশ্বাস কৰিবলৈ টান পায় যে এটা গাণিতিক ধাৰণাই ইয়াত এখন সাৰুৱাক্ষেত্ৰ বিচাৰি পায়। কিন্তু প্ৰকৃততে কেইবছৰমানৰ ভিতৰতে সংগ্ৰথনৰ ধাৰণাটোৱে পশ্চিমৰ সংস্কৃতিৰ সকলো চিন্তাকে প্ৰভাৱিত কৰি লয়। বহবাকী হৈ পৰে এই নতুনত্বৰ প্ৰধান শক্তিটো। এই গুৰুত্বপূৰ্ণ ধাৰণাটোক বুজিবলৈ আৰু ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰিবলৈ বুলি সমাজবিজ্ঞানীসকলক, মানৱতাবাদীসকলক আৰু লিখকসকলক সক্ষম কৰি তোলে।

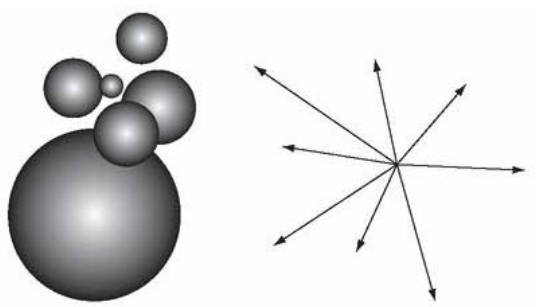
এনেকুৱাও ঘটে– কোনো ধাৰণাই বিকাশ লাভ কৰিলে ই কোনোবা সঠিকভাবে গ্ৰহণ কৰিব পৰা উপযুক্ত এজনক অপেক্ষা কৰি ৰয়, যিজনে ইয়াক আগুৱাই লৈ যাব পাৰে। আৰু বাস্তৱলৈ লৈ আহিবলৈ সক্ষম হয়। ঠিক এনে এক সংঘটনেই ঘটিছিল ১৯৪২ ত সংগ্ৰথনৰ ধাৰণাৰ ক্ষেত্ৰত। মহান নৃতত্ত্ববিদ ক্লড লেভী-ষ্ট্যাছে ভাষাবিজ্ঞানী ৰোমান জেকবছনৰ পৰা শিকি লৈ নৃতত্ত্বত সংগ্ৰথনক প্ৰয়োগ কৰিবলৈ আগবাঢ়িছিল। কিন্তু তেওঁক প্ৰয়োজন হৈ পৰিছিল সংগ্ৰথনৰ গাণিতিক দৃঢ় খোপনিটোৰ। আৰু ইয়াৰ যোগান ধৰিছিল বহবাকীয়ে। লেভী-ষ্ট্যাছ আৰু অন্দ্ৰে ভেইৰ মাজত হোৱা সেই বছৰৰে নিউয়ৰ্কৰ এখন মিটিঙত লেভী-ষ্ট্যাছে অধ্যয়ন কৰি থকা তেজৰ সম্বন্ধৰ এটা কঠিন সমস্যাৰ সমাধানে ৰূপ পাইছিল।

অন্দ্ৰে ভেইয়ে সংগ্ৰথনক ব্যৱহাৰ কৰিছিল– আচলতে ওপৰত বৰ্ণোৱা গাণিতিক গ্ৰুপৰ সংগ্ৰথনক লেভী-ষ্ট্যাছৰ সমস্যা সমাধান কৰিবলৈ বুলি। তেনে কৰিবলৈ যাওঁতে ভেইয়ে সংগ্ৰথনৰ গাণিতিক ধাৰণাক নৃতত্ত্বলৈ লৈ যাব পাৰিছিল আৰু তাৰে পৰা আনবোৰ ক্ষেত্ৰলৈ। বহবাকীয়ে এনেদৰে সংগ্ৰথনৰ শক্তিশালী ক্ষমতাক বশ কৰোঁতে গুৰুত্বপূৰ্ণ ভূমিকা লৈছিল। আমাৰ সংস্কৃতিখিনি এই গুৰুত্বপূৰ্ণ বিকাশৰ পাছত আৰু একে হৈ থকা নাছিল।

কেতিয়াবা কেতিয়াবা কেইবাটাও ঢাক খাই থকা বা লুকাই থকা সংগ্ৰথন একোটা গাণিতিক পৰিস্থিতিৰ বুনিয়াদ হ'ব পাৰে। তেনে এক পৰিস্থিতি হৈছে সংস্থিতীয় সংঘ (topological group)। এইটো আলেকজেণ্ডাৰ গ্ৰোথিএনডিকৰ তেওঁৰ কেৰিয়াৰৰ আদি ভাগৰ বৰ আকৰ্ষণৰ বিভাগ আছিল, লগতে আন ফৰাছী গণিতজ্ঞৰো। সংস্থিতীয় সংঘৰ এটা সংগ্ৰথন হৈছে সংস্থিতীয় "সামীপ্য"ৰ সংগ্ৰথনৰ। আৰু আনটো হৈছে এটা সংঘৰ সংগ্ৰথনৰ। আন এটা দ্বি সংগ্ৰথনৰ উদাহৰণ হৈছে সংস্থিতীয় অন্তৰীক্ষৰ 'কালি'ৰ। সৰলতম বৰ্ণনাৰে এটা সদিশ ৰাশি হৈছে এডাল কাঁড়, যি দৈৰ্ঘ্য আৰু দিশযুক্ত।



এনেদৰে সদিশ অন্তৰীক্ষক সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হয়, সদিশ ৰাশিৰ সহায়ত। অন্তৰীক্ষৰ সংস্থিতি হৈছে মুক্ত সংহতি কেতবোৰৰ এক প্ৰণালী (ইয়েই 'সামীপ্য'ৰ সংজ্ঞা দিয়ে)। তলৰ চিত্ৰত এটা সংস্থিতীয় সদিশ অন্তৰীক্ষৰ সংগ্ৰথন আছে: এটা অন্তৰীক্ষ সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা আছে– দুয়োৰে সহায়ত মুক্ত সংহতিৰ থুপ হিচাপে কেতবোৰ ভিন্ন আকাৰৰ বল, আৰু সদিশ ৰাশিকেতবোৰ।



সংগ্ৰথনৰ ধাৰণাই বহবাকী দলৰ গণিতজ্ঞসকলক অনুমতি প্ৰদান কৰিছিল– জটিল গাঁথনিৰ গণিতৰ বিকাশ ঘটাবলৈ বুলি। ই আছিল প্ৰাথমিক ধাৰণাৰ ওপৰত ভেঁটি কৰি আৰু আধুনিক গণিতৰ সমগ্ৰ সৌধটোক, কেতবোৰ মৌলিক ধাৰণাৰ ওপৰত সাজিবলৈ বুলি। এইসমূহ একে ধাৰণাই ভিন্ন ক্ষেত্ৰত প্ৰয়োগ বিচাৰি পাইছিল।

~ ০ ~

যুদ্ধ সমাপ্তিৰ পাছৰ কথা। গোপন গাণিতিক সংস্থা নিক'লা বহবাকী বিয়পি পৰিছিল আৰু গাণিতিক ধাৰণাৰ বিকাশত এক

মুখ্য ভূমিকা লৈছিল। বহবাকীয়ে আৰম্ভ কৰিছিল গণিতৰ ৰূপগত বা চৰিত্ৰগত পৰিৱৰ্তন আনিবলৈ– এক দৃঢ় তত্ত্বগত ভেঁটিৰ ওপৰত ইয়াক থাপনা কৰি। বহবাকীৰ কৰ্ম-কৃতিৰ জৰিয়তে ফৰাছী লাভৱান হৈছিল গণিতত প্ৰাধান্য পাবলৈ বুলি– যেনেদৰে জাৰ্মান গণিতে প্ৰাক-যুদ্ধকালীন কালত পাই থকা প্ৰাধান্য অৱনমিত হৈছিল। সংহতি তত্ত্বৰ ওপৰত ভেঁটি কৰি নতুন গণিতে জন্ম পাইছিল। এক সময় ধৰি ই আমেৰিকান শিক্ষা-ব্যৱস্থাক প্ৰভাৱিত কৰি লৈছিল, আন আন জাতিৰ শিক্ষা পদ্ধতিত আৱশ্যকীয় হৈ পৰিছিল। এই অভিযোজনখিনি বহবাকীৰ কৃতিৰ প্ৰতি ধৰুৱা হৈ ৰয়। এই একক বৈশিষ্ট্যৰ গণিতজ্ঞৰ দলটোৰনো কি কি সাফল্য দেখা পাওঁ?

১৯৯৮ ৰ 'মেথেমেটিকেল ইণ্টেলিজেঞ্চাৰ'ত মাৰ্জোৰী ছেনেকালে বহবাকী দলৰ এগৰাকী খ্যাত পূৰ্ব-সদস্যৰে (পীয়েৰ কাৰ্টিয়েৰ) হোৱা সাক্ষাতত দলটোৰ সাফল্যৰ সন্দৰ্ভত তলত লিখা দৰে উল্লেখ কৰিছে:

১) বহবাকী আছিল গণিত সজ্জাৰ ধাৰণাটোৰ আৱিষ্কাৰক (discoverer/inventor)।

২) বহবাকী কুৰি শতিকাৰ মহত্তম বিমূৰ্তকৰণকাৰীসকলৰ মাজৰ এজন।

৩) বহবাকী, গণিতজ্ঞৰ এটা সৰু দল হ'লেও, ই কুৰি শতিকাটোৰ গণিতৰ বিকাশ তথা প্ৰসাৰত অভূতপূৰ্ব প্ৰভাৱ পেলাই থৈছে।

পীয়েৰ কাৰ্টিয়েৰৰ জন্ম হৈছিল ১৯৩২ ত, বেলজিয়াম সীমনাৰ নিকটৱৰ্তী উত্তৰ ফৰাছীৰ ছেডানত। আলজেৰীয় যুদ্ধৰ সময়ত, এক ফৰাছী নৌ-জাহাজত এজন কনিষ্ঠ বিষয়া হিচাপে কাম কৰিছিল। কাম আছিল প্ৰধানকৈ আলজেৰীয় জল-সীমনাত পহৰা দিয়া। পাছলৈ, বিশেষকৈ তেওঁৰ গণিত প্ৰতিভাৰ বাবেই আৰু তেওঁ লোৱা শিক্ষাৰ বাবে দায়িত্ব দিয়া হৈছিল নৌ-বিষয়াক গণিত শিকাবলৈ বুলি। কাৰ্টিয়াৰৰ আকৰ্ষণ আছিল বিশুদ্ধ বা মৌলিক আৰু প্ৰায়োগিক দুয়োটাতেই।

কাৰ্টিয়েৰক পেৰিছৰ ইকোল নৰ্মেলত লোৱা হৈছিল, তেওঁ হেনৰী কাৰ্টানৰ এজন ছাত্ৰ আছিল। তেওঁ যিহেতু অতি প্ৰতিভাৱান ছাত্ৰ আছিল, আৰু আনকি এজন প্ৰথম বাৰ্ষিকৰ ছাত্ৰ হিচাপেও অতি ব্যুৎপত্তি দেখুৱাইছিল, কাৰ্টানে বহবাকীক অনুৰোধ কৰিছিল যাতে কাৰ্টিয়েৰক ফৰাছী আল্পচৰ পাৰভউত হ'ব লগা তেওঁলোকৰ ১৯৫১ ৰ মিটিঙলৈ মাতে। এই মিটিঙৰ সময়ছোৱাত বহবাকীয়ে লী সংঘৰ সম্পৰ্কত কাম কৰি আছিল।

লী সংঘৰ এই গুৰুত্বপূৰ্ণ আধুনিক বিষয়টো গণিতত থকা ইয়াৰ ভূমিকাটোৰ উপৰি তাত্ত্বিক পদাৰ্থবিজ্ঞানত এক হাতিয়াৰ ৰূপে দেখা দিয়ে। ই আছিল বহবাকীয়ে লিখা কিতাপসমূহৰ শেহতীয়াখন। সেই সময়লৈ এই দলটোৱে লিখা "পোনপ্ৰথম কাম"ৰ তুল্য কিতাপবোৰ তলত উল্লেখ কৰা হল: (শিৰোনামখিনি ইংৰাজী অনুবাদৰ)

Theory of Sets (সংহতি তত্ত্ব), Algebra (বীজগণিত), Topology (সংস্থিতি বিদ্যা), Functions of One Real Variable (বাস্তৱ এক চলকৰ ফলন), Topological Vector Space (সংস্থিতীয় অন্তৰীক্ষ), Integration (অনুকলন)।

এইবোৰৰ উপৰি এখন সৰু কিতাপ আছিল– সেয়া ৰিজাল্ট কেতবোৰৰ এক সাৰাংশ মাথোন। অৱকলন আৰু বৈশ্লেষণিক বিচিত্ৰতাৰ যি বহুভাঁজ বা সমষ্টি তত্ত্বৰে জড়িত (differential and analytical varieties)। সংহতি তত্ত্বৰ কিতাপখনো প্ৰথমতে ৰিজাল্ট বা ফলোদয়ৰ এক সাৰাংশ কৰিয়েই লিখাৰ পৰিকল্পনা আছিল যদিও, ই শেষত গৈ দলটোৱে লিখা প্ৰথমখন পূৰ্ণ পাঠ্যপুথি হিচাপেই ৰূপ পালে। ই গণিতৰ গোটেইখিনিকেই সংহতিৰ ধাৰণাৰ ওপৰত ভেঁটি কৰি ৰোৱা বিকাশৰ এক মঞ্চ হিচাপে ৰূপ দিলে। ইয়াত আহি পৰিল– এটা সংহতিৰ ধাৰণা, সংহতিৰ সদস্য, সংহতিৰ অন্তৰ্বৰ্তীতা, আৰু মিলন, ছেদন আৰু সমমিত পাৰ্থক্যৰ সংহতি-প্ৰক্ৰিয়াসমূহ। সংহতিতত্ত্বৰ সংগ্ৰথনৰ মাজত সহজাত হৈয়েই ৰৈ আছে, গভীৰ বিৰোধাভাষ (paradox) আৰু অ-সংগতিপূৰ্ণতা (inconsistency)। ই দৃষ্ট হৈছিল কুৰি শতিকাৰ আদি ভাগত, জৰ্জ কেণ্টৰ, কুৰ্ট গডেল আৰু বাৰ্ট্ৰাণ্ড ৰাছেলৰ কৰ্মৰাজিৰ মাজত। কিন্তু বহবাকী দলটোৱে সংহতি তত্ত্বৰ মাজত সোমাই ৰোৱা এই তত্ত্বগত কঠিনতাখিনি আওকাণ কৰিবলৈ সিদ্ধান্ত লৈছিল। সিদ্ধান্ত লৈছিল সংহতি তত্ত্বৰ ওপৰত ভেঁটি কৰি ল'বলৈ বুলি সমগ্ৰ গণিতকেই, যিসমূহক ইয়াৰে জড়িতহৈ ৰোৱা সংখ্যাৰে অভ্যাস কৰা হয় বা ৰূপ দিয়া হয়, আৰু ইয়াৰ লিখনীৰ মাজত অন্তৰ্বৰ্তী হৈ ৰয়। পাৰভউত অধ্যয়ন কৰা বিষয়, লী সংঘ আছিল, সংহতি তত্ত্বৰ পৰা বৰ্ণালীটোৰ (spectrum) আনটো মূৰত। এহাতে সংহতি তত্ত্বই গঢ়ে – গণিতৰ মৌলিক বা প্ৰাথমিক ভেঁটিটো বহবাকী আনসকলৰ জৰিয়তে, আনহাতে লী সংঘসমূহ হৈছে অতি জটিল আৰু গণিতৰ সংপৃক্ত বিষয়, যি সংস্থিতি আৰু বৈশ্লেষণ গণিতৰ অবিচ্ছিন্ন জগতখনক আৰু বীজগণিতৰ বিচ্ছিন্ন জগতখনক ছেদন বা উমৈহতীয়া স্থানত দখল কৰি ৰৈছে।

দ্বিতীয় মহাযুদ্ধৰ মাজত, নাজীসকলৰ পৰা লুকাই থাকোঁতে লৰেণ্ট শ্চৱাৰ্জে বহবাকীত যোগ দিছিল। পাৰভউ মিটিঙত অতি

সক্ৰিয় সদস্যসকলৰ ভিতৰত তেওঁ আছিল অন্যতম। সেই সময়লৈ লৰেণ্ট শ্বৰ্জে তেওঁৰ গুৰুত্বপূৰ্ণ বণ্টন সমূহৰ (distributions) আৱিষ্কাৰ কৰে। আৰু ইয়ে তেওঁক বিখ্যাত কৰি তোলে। পীয়েৰ কাৰ্টিয়েৰৰ মতে ইকোল নৰ্মেলত গণিতৰ ছাত্ৰ সকলোৱেই কাৰ্টান আৰু শ্বৰ্জৰ ছাত্ৰ আছিল। আৰু এই সকলোৱেই বণ্টন-তত্ত্ব আৰু লী সংঘত ইয়াৰ ভূমিকা বুজিবলৈ অহোপুৰুষাৰ্থ কৰিছিল। কাৰণ, উনৈশ বছৰীয়া ছাত্ৰ হিচাপে আমন্ত্ৰিত হোৱা কাৰ্টিয়েৰৰ বাবে, বহবাকীৰ সেই মিটিংখন আছিল "অন্তঃফালৰ পৰা" এই গুৰুত্বপূৰ্ণ বিষয়টো শিকিবলৈ বুলি এক অবিশ্বাস্য সুবিধা। ফলস্বৰূপে লী সংঘতত্ত্বত তেওঁ নিজেই গুৰুত্বপূৰ্ণ অৱদান আগবঢ়াব পাৰিছিল।

এই সন্মিলনত উপস্থিত থকা বিশিষ্ট গণিতজ্ঞসকলৰ পৰা এই সুবিধাৰে শিকিবলৈ বুলি কাৰ্টিয়েৰ প্ৰভূতভাবে লাভৱান হৈছিল। ইয়াৰে কিছু সংখ্যকক অৱশ্যে তেওঁ আঁতৰৰ পৰাহে দেখিবলৈ পাইছিল। এই মিটিঙত তেওঁ শিকিছিল, সেই একক প্ৰণালীৰ বিষয়ে, যি উপায়ে বহবাকীয়ে গণিত কৰিছিল: পাঠ্যপুথিসমূহৰ ওপৰত কৰা কামখিনি, গৱেষণাৰ কামখিনি, উপপাদ্যসমূহৰ ধাৰণা সম্পৰ্কীয় আলোচনা আৰু ছাত্ৰসকলৰ কামখিনি – এই গোটেইবোৰ ইটোৱে সিটোৰ সৈতে সাঙোৰ খাই আছিল। কাৰ্টিয়েৰৰ মতে, এয়া বহবাকীৰ ধাৰণা, গৱেষণা, আৰু লিখন শৈলীৰ সেই সংহতকৰণখিনি, যিখিনিক ১৯৫০ ৰ পৰা ১৯৬০ লৈ আংশিকভাবে ফৰাছী গণিতৰ মহত্ত্বম কৃতকাৰ্যৰ বাবে, আৱৰ্তৰ ভিতৰলৈ অনা হয়।

কাৰ্টিয়েৰৰ মতে, মিটিঙখন আছিল, আধুনিক গণিতলৈ তেওঁৰ বাস্তৱ সদৰীকৰণ। তেওঁ আহিছিল এখন সৰু চহৰৰ পৰা, যিখন দ্বিতীয় মহাসমৰত বাৰুকৈয়ে ক্ষতিগ্ৰস্ত হৈছিল, আৰু তেতিয়ালৈকে পুনৰ্নিৰ্মিত হোৱা নাছিল। তেওঁৰ স্কুলখন প্ৰাদেশিক বা সংকীৰ্ণতাপূৰ্ণ আৰু কৰ্ম-প্ৰণালীত পুৰণিকলীয়া বুলি অভিহিত কৰিছিল। তেওঁৰ শিক্ষকসকলৰ কিছুমান ভালেই আছিল, পিছে তেওঁলোক আছিল আধুনিক বিজ্ঞান জগতখনৰ পৰা বহু আঁতৰত। কাৰ্টিয়েৰে ব্যাখ্যা কৰিছে, ফৰাছীৰ উত্তৰ-যুদ্ধ কালৰ এক বাস্তৱ বৌদ্ধিক শূন্যতাৰ মাজত বহবাকীয়ে কেনেকৈনো ৰূপায়িত কৰিছিল। উদাহৰণস্বৰূপে তেওঁ কৈছিল স্কুলত তেওঁ শিকা জ্যামিতি আছিল "ক্লাছিকেল জ্যামিতি", অনাকৰ্ষিত সাংশ্লেষিক উপায়ে। তেওঁ শিকা গণিত আৰু পদাৰ্থবিজ্ঞানখিনি সেই সময়ত আছিল পুৰণি ঢঙৰ। উদাহৰণস্বৰূপে তেওঁৰ মনত পৰে– চৰ্বনত (পেৰিছৰ লেটিন স্কোৱেৰৰ এটা বিল্ডিং। ১২৫৩ ৰ পৰা চৰ্বন কলেজৰ স্থান আছিল বিশ্বৰ প্ৰথম বিশ্ববিদ্যালয়সমূহৰ ভিতৰৰ এখন, পাছলৈ পেৰিছ বিশ্ববিদ্যালয়) এটা সাধাৰণ পদাৰ্থবিজ্ঞানৰ পাঠ্যক্ৰমত অধ্যাপকে সম্বোধন কৰিছিল– "ভদ্ৰলোকসকল (gentlemen) (লক্ষ্যণীয় যে তাত ভদ্ৰমহিলাও উপস্থিত আছিল) মোৰ ক্লাছত কিছুমানে যাক 'আণৱিক প্ৰকল্প' (atomic hypothesis) বুলি কয় তাৰ স্থান নাই।"

কাৰ্টিয়েৰে কৈছিল এয়া ঘটিছে ১৯৫০ ত, হিৰোশ্বিমাত এট'ম বোমা পৰাৰ পাঁচ বছৰৰ পাছত। তেওঁ আৰু কয় যে ইয়ে দেখুৱায় সেই সময়ত ফৰাছী বিশ্ববিদ্যালয় কেনেধৰণৰ আছিল। বহবাকীৰ প্ৰভাৱ বুজিবলৈ হ'লে কোনো এজনে সেইখিনি বুজি পাব লাগিব। বহবাকী ভেকুৱাম বা শূন্য স্থানৰ ভিতৰলৈ আহিছিল। স্বাভাৱিকতে পঞ্চাশৰ আদি সময়ছোৱাত বিজ্ঞান শিক্ষণ বৰ নিম্ন পৰ্যায়ৰ আছিল। বহবাকীক পাঁচ বা ছয় বছৰ লাগিছিল এই গোটেই প্ৰণালীটোক ভাঙিবলৈ বুলি। ১৯৫৭ বা ১৯৫৮ লৈ ফৰাছীত এই ভাঙোন প্ৰক্ৰিয়া প্ৰায় পূৰ্ণ হৈছিল। ১৯৫০ ৰ দশকত বহবাকীয়ে প্ৰতি বছৰত দুটাকৈ খণ্ড প্ৰকাশ কৰিছিল। গণিতৰ ছাত্ৰই কিতাপৰ দোকানলৈ দৌৰাদৌৰিকৈ গৈছিল এই কিতাপবোৰ কিনিবলৈ। ফলশ্ৰুতিত গণিত শিকিছিল খুঁটিনাটি মাৰি আৰু সম্যকভাৱে আৰু সূক্ষ্মভাৱে। এই অতি উৎপাদনক্ষম কালছোৱাত, বহবাকীদল বছৰত দুবাৰকৈ লগ লাগিছিল। এসপ্তাহ জুৰি মিটিং হৈছিল বন্ধৰ কালত। আৰু আনখন বসন্ত কালত। গ্ৰীষ্মত দুসপ্তাহজোৰা সন্মিলন হৈছিল। এই মিটিংবোৰত বহবাকী সদস্যসকল বৰ কঠোৰভাবে কৰ্মৰত হৈছিল। প্ৰায়েই দিনত দহ-বাৰ ঘণ্টাকৈ। আৰু তেওঁলোকে জন্ম দিছিল বৃহৎ কৰ্মৰাজি। বহবাকীৰ প্ৰকাশিত কিতাপসমূহ মুঠতে ১০,০০০ পৃষ্ঠাৰ। অৰ্থাৎ ১,০০০ ৰ পৰা ২,০০০ পৃষ্ঠাৰ প্ৰাৰম্ভিক ৰিপোৰ্ট, আৰু খচৰাসমূহ লিখা হৈছিল দলটোৰ দ্বাৰা প্ৰতি বছৰে।

১৯৫৫ ত পীয়েৰ কাৰ্টিয়েৰক বিভাগীয়ভাবে বহবাকী দলটোৰ সদস্যভুক্ত কৰা হৈছিল। দলটোৰ পৰা তেওঁ অৱসৰ লৈছিল প্ৰায় ত্ৰিশ বছৰৰ পাছত, ১৯৮৩ চনত। তেতিয়া তেওঁৰ পঞ্চাশ বছৰ পাৰ হৈ গৈছে– সদস্যসকলৰ অৱসৰৰ বয়স সেয়া। তেওঁ দলটোৰ কৰ্মকালৰ অতি গুৰুত্বপূৰ্ণ আৰু ফলপ্ৰসূ বা উৰ্বৰ বছৰকেইটাত কৰ্মৰত হৈছিল। তেওঁৰ নিজৰেই হিচাপত, বহবাকীৰ কৰ্ম প্ৰচেষ্টাত অৱদান আগবঢ়াইছিল এবছৰত সৰ্বমুঠ ২০০ পৃষ্ঠাকৈ।

বহবাকী আছিল গণিতজ্ঞৰ এটা নিচেই সৰু দল। নিদৰ্শনস্বৰূপ সংখ্যা হিচাপে প্ৰায় বাৰজন ব্যক্তিৰ। ইয়াৰ প্ৰথমটো প্ৰজন্ম আছিল প্ৰতিষ্ঠাপক পিতৃস্বৰূপসকল– যিসকলে ১৯৩৪ ত ইয়াক সাকাৰ কৰিছিল: ভেই, কাৰ্টান, চিভাল্লী,

ডেলছার্ট, দ্য-পোচ্ছেল, আৰু ডিওডন। আনবোৰে দলটোত যোগ দিছিল, আৰু বাকীবোৰে ইয়াৰ ৰেংক এৰিছিল। গতিকে কিছু বছৰৰ পাছত প্ৰায় বাৰজন সদস্য হৈছিল। আৰু সংখ্যাটো মোটামুটি একেই হৈ আছিল। লৰেণ্ট শ্বৱাৰ্জ আছিল একমাত্ৰ গণিতজ্ঞ, যি বহবাকী দলত যোগ দিছিল যুদ্ধকালীন সময়ৰ মাজডোখৰত। সেয়ে তেওঁক লোৱা হৈছিল এজন অন্তৰ্বৰ্তীকালীন প্ৰজন্ম বুলি। যুদ্ধৰ পাছত এমুঠি সদস্যই যোগ দিছিল: জিন পীয়েৰে চেৰ, পীয়াৰ চেমুৰেল, জিন লুই কোজুল, জেক ডিক্সমিয়েৰ, ৰোজাৰ গোডেমেণ্ট, আৰু চ্যামি আইলেনবাৰ্গ। এইসকল ব্যক্তিয়ে বহবাকীৰ দ্বিতীয়টো প্ৰজন্ম গঢ়িছে। ১৯৫০ ত বহবাকীৰ তৃতীয়টো প্ৰজন্মৰ গণিতজ্ঞসকলে যোগ দিয়ে। এইসকলৰ ভিতৰত আছে: আলেকজেণ্ডাৰ গ্ৰোথিএনডিক, ফ্ৰাঞ্চ ব্ৰুহেট, ছাৰ্জ ল্যাং, আমেৰিকান গণিতজ্ঞ জন ট্যেট, পীয়েৰ কাৰ্টিয়েৰ, আৰু চুইছ গণিতজ্ঞ- আৰ্মাণ্ড বোৰেল।

দলটোৰ দ্বাৰা বহবাকী চেমিনাৰ আৰম্ভ হৈছিল যুদ্ধৰ পাছত। বৰ বিস্তৃত পৰিসৰত যোগদান ঘটিছিল, বহবাকীয় সদস্য-সংখ্যাৰ বিপৰীতে। এই নিয়মীয়া ছেমিনাৰত, প্ৰকৃততে যোগদানকাৰীসকলৰ অধিকাংশৰেই বহবাকী নামৰ দলটোৰ সৈতে কোনো সম্পৰ্ক নাছিল। চেমিনাৰখন আছিল, এক সক্ৰিয় নিৰ্গমন তুল্য, ফৰাছী গণিতৰ গৱেষণালব্ধ ফলসমূহৰ। ইয়াত দৰকাৰী গণিত বিষয়ৰ সম্পৰ্কত হোৱা গৱেষণা-পত্ৰ উপস্থাপন কৰা হৈছিল আৰু আলোচনা কৰা হৈছিল। এই চেমিনাৰে সমৃদ্ধি লভিছিল– ১৯৫০ আৰু ১৯৬০ ত আংশিকভাবে। কাৰণটো আছিল ফৰাছীত কোনো গণিত-সংস্থা নাছিল, যিয়ে এনে বক্তৃতাৰ আয়োজন কৰিব। সাধাৰণতে বহবাকীৰ সদস্যসকলেই চেমিনাৰ চলাইছিল আৰু চেমিনাৰ হৈ পৰিছিল এই সংস্থাটোৰ মুখপত্ৰ সদৃশ। এনেদৰেই বহবাকীয়ে অৱগত কৰিছিল গণিত জগতখনৰ বাকীখিনিলৈ ইয়াৰ কিতাপসমূহৰ জৰিয়তে আৰু ইয়াৰ চেমিনাৰসমূহত ৰূপিত হোৱা ধাৰণাবোৰেৰে। কিন্তু ভেন্যু বাঢ়ি যোৱাৰ লগে লগে এইবোৰ চেমিনাৰত উপস্থাপন কৰা গৱেষণা-পত্ৰসমূহৰ বহবাকীৰ লগত একো সম্পৰ্ক নাছিল। বহবাকী চেমিনাৰসমূহ এক ভাল ভেন্যু হৈ পৰিছিল, ফৰাছী আৰু আন গণিতজ্ঞসকলৰ বাবে উপস্থাপন কৰিবলৈ বুলি আৰু তেওঁলোকৰ কৰ্মৰ আলোচনা কৰিবলৈ বুলি। সেই দিনবোৰত, ২০০ ব্যক্তিয়ে চেমিনাৰত যোগ দিছিল। এই চেমিনাৰ আজিও আছে। এই চেমিনাৰ হয় পেৰিছৰ ইনষ্টিটিউট আঁৰি পইনকাৰেৰ লেকচাৰ হলত। কাৰণ তাত কোনো সক্ৰিয় ফৰাছী গণিত-সংস্থা নাই। সেয়ে আজিকালি বহবাকী চেমিনাৰত ভিৰ কম হয়। সাধাৰণতে সত্তৰজনতকৈ কম সংখ্যক গণিতজ্ঞই ভাগ লয় প্ৰতিখন মিটিঙত।

কোনো একোটা স্বাভাৱিক সংখ্যা m ক প্ৰথম n টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ 'নিখুঁত মধ্যমা' বুলি কোৱা হয় যদিহে $১+২+\cdots+(m-১) = (m+১)+(m+২)+\cdots+n$। অৰ্থাৎ, $m^২ = \dfrac{n(n+১)}{২}$ হ'ব লাগিব। ইয়াত দেখা গ'ল যে বাওঁপিনে আছে এটা বৰ্গ সংখ্যা আৰু সোঁপিনে আছে এটা ত্ৰিভুজীয় সংখ্যা। গণিতজ্ঞ অয়লাৰে (১৭০৭ – ১৭৮৩) সুকীয়াভাবে, কোনবোৰ সংখ্যা একেলগে বৰ্গ সংখ্যাও হয় আৰু ত্ৰিভুজীয় সংখ্যাও হয়, সেই সম্পৰ্কে অধ্যয়ন কৰিছিল। তেওঁৰ পৰা প্ৰায় ১১০০ বছৰ পূৰ্বে ভাৰতীয় গণিতজ্ঞ ব্ৰহ্মগুপ্তই এবিধ সমীকৰণ কিছু অধ্যয়ন কৰিছিল, যাৰ আৰ্হিটো হৈছে $x^২ - Ny^২ = k$। অয়লাৰে সেই কথা জনা নাছিল।

যদি, $m^২ = \dfrac{n(n+১)}{২}$ ক অলপ ভাঙি দিয়া হয়, তেন্তে পোৱা যায় যে $(২n+১)^২ - ৮m^২ = ১$। আৰু $২n+১ = x, ২m = y$ ধৰিলে ই হ'বগৈ $x^২ - ২y^২ = ১$। এইধৰণৰ সমীকৰণবোৰ আন কেইবাজনেও অধ্যয়ন কৰিছিল আৰু তেওঁলোকতকৈয়ো আন এজনে সমাধান কৰা বুলিহে আয়লাৰে ভুলক্ৰমে উল্লেখ কৰিছিল। যি কি নহওক, এই সমীকৰণটোৰ এটা সহজ সামাধান হ'ল $(৩,২)$। আৰু সমীকৰণটোৰ পৰা আমি পাওঁ $(x+\sqrt{২}y)(x-\sqrt{২}y) = ১$। গতিকে, $(৩+২\sqrt{২})(৩-২\sqrt{২}) = ১$। বাওঁপিনৰ ৰাশি দুটাক পৃথকে পৃথকে বৰ্গ কৰিলে পাম $(১৭+১২\sqrt{২})(১৭-১২\sqrt{২}) = ১$, সেইদৰে ঘনফল ল'লে পাম $(৯৯+৭০\sqrt{২})(৯৯-৭০\sqrt{২}) = ১$। অৰ্থাৎ, $(১৭,১২),(৯৯,৭০)$ সমীকৰণটোৰ আন দুটা সমাধান। এইদৰে ঘাত বঢ়াই গৈ থাকি সমীকৰণটোৰ অসীম সংখ্যক সমাধান পোৱা যাব। গতিকে, (m,n) ৰ তিনিটা মান হ'ল $(১,১),(৮,৬),(৪৯,৩৫)$, আৰু লগতে গম পোৱা গ'ল অসীম সংখ্যক (m,n) পোৱা যাব।

ৰামানুজন কেম্ব্ৰিজত থকা সময়ত ভাৰতীয় পৰিসংখ্যাবিদ প্ৰশান্ত চন্দ্ৰ মহালানবিশক লগ পাইছিল। এদিন মহালানবিশে ৰামানুজনৰ ওচৰলৈ যাওঁতে আলোচনী এখনৰ 'সাঁথৰ' শিতানটোত থকা প্ৰশ্ন এটাৰ বিষয়ে কৈছিল: ১ ৰ পৰা ক্ৰমিকভাবে নম্বৰ দি থোৱা এশাৰী ঘৰৰ এটা ঘৰত এজন মানুহ থাকে। তেওঁৰ একাষৰ ঘৰবোৰৰ নম্বৰৰ যোগফল, আনটো কাষৰ ঘৰবোৰৰ নম্বৰৰ যোগফলৰ সমান। শাৰীটোত ৫০ তকৈ অধিক আৰু ৫০০ তকৈ কম ঘৰ আছে। সেই মানুহজন থকা ঘৰটোৰ নম্বৰটো কি? আন ভাষাৰে, সেই প্ৰশ্নটো আছিল নিখুঁত মধ্যমা নিৰ্ণয়ৰ সম্পৰ্কে। ৰামানুজনে তৎক্ষণাতে উত্তৰটো দি মহালানবিশক আচৰিত কৰি দিছিল। কিন্তু, ৰামানুজনে উত্তৰটো উলিয়াইছিল আন ধৰণে। তেওঁ ব্যৱহাৰ কৰিছিল অবিৰত ভগ্নাংশ (continued fraction)।