অপৰিমেয় e-ৰ কথা

ড° নয়নদীপ ডেকা বৰুৱা

গণিতবিজ্ঞান বিভাগ, তেজপুৰ বিশ্ববিদ্যালয়, শোণিতপুৰ, অসম, পিন-৭৮৪০২৮

E-mail: nayandeeptezu@gmail.com

প্ৰস্তাৱনা

কলন গণিত পাঠ্যক্ৰমৰ আৰম্ভণিতে ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকল e সংখ্যাটোৰ সৈতে পৰিচিত হয়। উচ্চতৰ মাধ্যমিক পৰ্যায়ত e সম্পৰ্কে তলত উল্লেখ কৰা কথাবোৰ জানিব পৰা যায়।

১) এটা বিশেষ অনুক্ৰমৰ সীমাংক (limit) হ'ল e। যথা,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(১ + \frac{১}{n}\right)^n ।$$

২) সাধাৰণ ঘাতাংকৰ আধাৰ (base of natural logarithm) হ'ল e।

৩) স্বাভাৱিক সংখ্যাবোৰৰ গৌণিকৰ (factorial) প্ৰতিক্ৰমবোৰৰ দ্বাৰা সৃষ্ট অসীম শ্ৰেণীটোৰ যোগফল হ'ল e। অৰ্থাৎ,

$$১ + \frac{১}{১!} + \frac{১}{২!} + \frac{১}{৩!} + \frac{১}{৪!} + \frac{১}{৫!} + \cdots = e,$$

য'ত এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা k-ৰ বাবে $k!$ (k-ৰ গৌণিক, factorial of k) -ৰ অৰ্থ হ'ল

$$k! = ১ \times ২ \times ৩ \times \cdots \times (k - ১) \times k ।$$

৪) e হ'ল এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।

বিজ্ঞান আলোচনী 'বিজ্ঞান জেউতি'ৰ ২০২১ চনৰ অক্টোবৰ-নৱেম্বৰ সংখ্যাত প্ৰকাশিত 'e-ৰ প্ৰাৰম্ভিক কথা' শীৰ্ষক প্ৰবন্ধত e ৰ উপৰিউক্ত প্ৰথম দুটা বৈশিষ্ট্যৰ বিষয়ে ইতিমধ্যে লিখা হৈছে।[1] এই প্ৰবন্ধত পৰৱৰ্তী বৈশিষ্ট্য দুটাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হৈছে।

[1] বিজ্ঞান জেউতি, অক্টোবৰ-নৱেম্বৰ, ২০২১। পৃষ্ঠা ১৮।

অসীম শ্ৰেণীৰ যোগফল হিচাপে e

ওপৰৰ ৩ নং বৈশিষ্ট্যটো হৈছে,

$$১+\frac{১}{১!}+\frac{১}{২!}+\frac{১}{৩!}+\frac{১}{৪!}+\frac{১}{৫!}+\cdots=e \text{ ।} \tag{১}$$

এটা অসীম শ্ৰেণী $S_১+S_২+S_৩+\cdots$-ৰ যোগফল S বুলি ক'লে আমি বুজোঁ যে শ্ৰেণীটোৰ n-তম আংশিক যোগফলৰ দ্বাৰা সৃষ্ট অনুক্ৰমটো, অৰ্থাৎ $(S_১, S_১+S_২, S_১+S_২+S_৩,\cdots)$-টো S-লৈ অভিসাৰী হয়। মানে

$$\lim_{n\to\infty}(S_১+S_২+S_৩+\cdots+S_n)=S \text{ ।}$$

গতিকে সূত্ৰ (১) প্ৰমাণ কৰিবলৈ দেখুৱাব লাগে যে

$$\lim_{n\to\infty}\left(১+\frac{১}{১!}+\frac{১}{২!}+\frac{১}{৩!}+\frac{১}{৪!}+\cdots+\frac{১}{n!}\right)=e=\lim_{n\to\infty}\left(১+\frac{১}{n}\right)^n \text{ ।} \tag{২}$$

ইতিমধ্যে পাই অহা সীমাংকৰ সূত্ৰত দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem) প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ যে

$$\begin{aligned}
e &= \lim_{n\to\infty}\left(১+\frac{১}{n}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(১+\frac{n}{১!}\cdot\frac{১}{n}+\frac{n(n-১)}{২!}\cdot\frac{১}{n^২}+\frac{n(n-১)(n-২)}{৩!}\cdot\frac{১}{n^৩}\right.\\
&\quad\left.+\frac{n(n-১)(n-২)(n-৩)}{৪!}\cdot\frac{১}{n^৪}+\cdots+\frac{n(n-১)(n-২)(n-৩)\cdots(n-(n-১))}{n!}\cdot\frac{১}{n^n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(১+\frac{১}{১!}+\frac{১}{২!}\left(১-\frac{১}{n}\right)+\frac{১}{৩!}\left(১-\frac{১}{n}\right)\left(১-\frac{২}{n}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{১}{৪!}\left(১-\frac{১}{n}\right)\left(১-\frac{২}{n}\right)\left(১-\frac{৩}{n}\right)+\cdots+\frac{১}{n!}\left(১-\frac{১}{n}\right)\left(১-\frac{২}{n}\right)\left(১-\frac{৩}{n}\right)\cdots\left(১-\frac{n-১}{n}\right)\right)\text{।}
\end{aligned}$$

যিহেতু $\left(১-\frac{১}{n}\right)<১$, $\left(১-\frac{২}{n}\right)<১$, ইত্যাদি, গতিকে

$$\lim_{n\to\infty}\left(১+\frac{১}{n}\right)^n\leq\lim_{n\to\infty}\left(১+\frac{১}{১!}+\frac{১}{২!}+\frac{১}{৩!}+\frac{১}{৪!}+\cdots+\frac{১}{n!}\right)\text{।} \tag{৩}$$

আকৌ, ধৰা হওক m হ'ল এটা n-তকৈ সৰু নিৰ্দিষ্ট ধনাত্মক সংখ্যা, মানে $m<n$। সেয়েহে

$$\begin{aligned}
&১+\frac{১}{১!}+\frac{১}{২!}\left(১-\frac{১}{n}\right)+\cdots+\frac{১}{m!}\left(১-\frac{১}{n}\right)\left(১-\frac{২}{n}\right)\left(১-\frac{৩}{n}\right)\cdots\left(১-\frac{m-১}{n}\right)\\
&<১+\frac{১}{১!}+\frac{১}{২!}\left(১-\frac{১}{n}\right)+\cdots+\frac{১}{n!}\left(১-\frac{১}{n}\right)\left(১-\frac{২}{n}\right)\left(১-\frac{৩}{n}\right)\cdots\left(১-\frac{n-১}{n}\right)\ =\left(১+\frac{১}{n}\right)^n\text{।}
\end{aligned}$$

এতিয়া $n \to \infty$ লৈ পোৱা যায় যে

$$\lim_{n\to\infty}\left(১+\frac{১}{১!}+\frac{১}{২!}\left(১-\frac{১}{n}\right)+\cdots+\frac{১}{m!}\left(১-\frac{১}{n}\right)\left(১-\frac{২}{n}\right)\left(১-\frac{৩}{n}\right)\cdots\left(১-\frac{m-১}{n}\right)\right)$$
$$\le \lim_{n\to\infty}\left(১+\frac{১}{n}\right)^n,$$

অৰ্থাৎ,

$$১+\frac{১}{১!}+\frac{১}{২!}+\cdots+\frac{১}{m!}\le \lim_{n\to\infty}\left(১+\frac{১}{n}\right)^n ।$$

সেয়েহে

$$\lim_{n\to\infty}\left(১+\frac{১}{১!}+\frac{১}{২!}+\cdots+\frac{১}{n!}\right)\le \lim_{n\to\infty}\left(১+\frac{১}{n}\right)^n । \tag{৪}$$

অসমতা (৩) আৰু (৪)-ৰ পৰা সহজে (২)-ত উপনীত হ'ব পাৰি।

পৰৱৰ্তী শাখাত e-ৰ অপৰিমেয়তা সম্পৰ্কে বিস্তৃতভাৱে আলোচনা কৰা হৈছে। দশমিকত প্ৰকাশ কৰিলে e-ৰ মানটো হয় ২.৭১৮২৮১৮২৮৪ . . . । সূত্ৰ (১)-ৰ অসীম শ্ৰেণীটোত পদৰ সংখ্যা নিৰ্দিষ্ট সসীম মানলৈকে লৈ e-ৰ শুদ্ধমান যথেষ্ট খৰতকীয়াকৈ উলিয়াব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে, যদি শ্ৰেণীটোৰ প্ৰথম ছটা আৰু এঘাৰটা পদ লোৱা যায়, তেন্তে

$$১+\frac{১}{১!}+\frac{১}{২!}+\frac{১}{৩!}+\frac{১}{৪!}+\frac{১}{৫!}=২+\frac{১}{২}+\frac{১}{৬}+\frac{১}{২৪}+\frac{১}{১২০}=\frac{৩২৫}{১২০}=\mathbf{২.৭০৮৩৩৩৩৩}\ldots,$$
$$১+\frac{১}{১!}+\frac{১}{২!}+\frac{১}{৩!}+\cdots+\frac{১}{১০!}=২+\frac{১}{২}+\frac{১}{৬}+\cdots+\frac{১}{৩৬২৮৮০০}=\frac{৯৮৬৪১০০}{৩৬২৮৮০০}=\mathbf{২.৭১৮২৮১৫২৫৬}\ldots ।$$

অৰ্থাৎ, e-ৰ যথাক্ৰমে এক আৰু ছয় দশমিক স্থানলৈ শুদ্ধমান পোৱা যায়। উল্লেখনীয় যে, ২০২০ চনৰ ২২ নৱেম্বৰত আমেৰিকাৰ ডেভিড খ্ৰীষ্টলে (David Christle) e-ৰ মান ৩১,৪১৫,৯২৬,৫৩৫,৮৯৭ দশমিক স্থানলৈ শুদ্ধমান গণনা কৰি নতুন ৰেকৰ্ড গঢ়ে।

পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় সংখ্যা

সাধাৰণতে আমি স্কুলৰ পাঠ্যক্ৰমত পোৱা ধাৰণাৰে পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় সংখ্যাৰ সংজ্ঞাৰ মাজত থকা মৌলিক পাৰ্থক্য কেইটামান তলত দিয়া ধৰণে বুজোঁ।

১) পৰিমেয় সংখ্যা এটা $\frac{p}{q}$ আকাৰত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা আৰু q শূন্য নহয়। অপৰিমেয় সংখ্যাক এনেদৰে প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি। উল্লেখযোগ্য যে সকলো অখণ্ড সংখ্যাই পৰিমেয় সংখ্যা, কাৰণ যিকোনো অখণ্ড সংখ্যাকেই $\frac{p}{q}$ আকাৰত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, য'ত p হ'ল সেই অখণ্ড সংখ্যাটো আৰু q হ'ল ১।

২) যিকোনো পৰিমেয় সংখ্যাক দশমিকত প্ৰকাশ কৰিলে সেই প্ৰকাশটো সদায় সসীম (finite) নাইবা অসীম পৌনঃপুনিক (infinite recurring) দশমিক হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, ১/২ ক ০.৫ হিচাপে দশমিকত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, যিটো হ'ল সসীম দশমিক। ঠিক তেনেকৈ ১/৪ ক ০.২৫, ৩/৪ ক ০.৭৫, ইত্যাদি। আনহাতে ১/৩ ক দশমিকত প্ৰকাশ কৰিলে হ'ব ০.৩৩৩৩৩৩ . . . আৰু এইটো হ'ল এটা অসীম প্ৰকাশ, কিন্তু ই পৌনঃপুনিক, কাৰণ দশমিকৰ পিছৰ ৩ টো পুনঃ পুনঃ ওলায়েই থাকিব। কিন্তু সংখ্যা এটা যদি পৰিমেয় নহয়, মানে অপৰিমেয় হয়, তেন্তে তাৰ দশমিক প্ৰকাশটো কেতিয়াও সসীম (finite) নাইবা অসীম পৌনঃপুনিক (infinite recurring) হ'ব নোৱাৰে, সেয়া অসীম অপৌনঃপুনিক (infinite non-recurring) হ'বই লাগিব।

ওপৰৰ সংজ্ঞা দুটা প্ৰয়োগ কৰি সংখ্যা এটা অপৰিমেয় বুলি প্ৰমাণ কৰাটো বৰ সৰল নহয়, কাৰণ সংখ্যাটো “p/q আকাৰৰ নহয়” অথবা “সসীম বা অসীম পৌনঃপুনিক নহয়” বুলিহে প্ৰমাণ কৰিব লাগে। সাধাৰণতে প্ৰথমে সংখ্যাটো p/q আকাৰৰ হয় বুলি ধৰি লৈ পাছত এটা স্ববিৰোধী সিদ্ধান্তত উপনীত হৈ কিছুমান সংখ্যাক অপৰিমেয় বুলি প্ৰমাণ কৰিব পাৰি। এই পদ্ধতিৰে $\sqrt{২}$, $\sqrt{৩}$, $\sqrt{৫}$, আদিক অপৰিমেয় হিচাপে সহজে প্ৰমাণ কৰিব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে, $\sqrt{২}$ সংখ্যাটো লোৱা যাওক। ধৰা হওক যে $\sqrt{২}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা, অৰ্থাৎ $\sqrt{২} = p/q$, য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা আৰু q শূন্য নহয়। আমি $\frac{p}{q}$ ভগ্নাংশটো লঘিষ্ঠ আকাৰত আছে বুলি ধৰিব পাৰোঁ। অৰ্থাৎ p আৰু q ৰ গসাগু (গৰিষ্ঠ সাধাৰণ গুননীয়ক, ইংৰাজীত gcd: greatest common divisor) ১ বুলি ল'ব পাৰোঁ, কাৰণ যদি p আৰু q ৰ গসাগু ১-তকৈ ডাঙৰ হয় তেন্তে সেই গসাগুটোৰে p আৰু q দুয়োকে হৰণ কৰিলে পোৱা ভগ্নাংশটোৰ লব আৰু হৰৰ গসাগু ১ হ'বই। উদাহৰণস্বৰূপে, $\frac{৪}{১৪}$ ত লব ৪ আৰু হৰ ১৪ ৰ গসাগু হ'ল ২ আৰু এই দুয়োটাকে ২-ৰে হৰণ কৰি $\frac{৪}{১৪}$ ৰ লঘিষ্ঠ আকাৰ $\frac{২}{৭}$ পোৱা যায়।

এতিয়া $\sqrt{২} = p/q$ ৰ দুয়োফালে বৰ্গ লৈ সৰল কৰি আমি পাওঁ যে $p^২ = ২q^২$। যিহেতু সোঁফালৰ ৰাশিটো এটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা গতিকে বাওঁফালৰ ৰাশি $p^২$ টোও যুগ্ম। কিন্তু অযুগ্ম সংখ্যা এটাৰ বৰ্গ যিহেতু যুগ্ম হ'ব নোৱাৰে, গতিকে যুগ্ম বৰ্গ সংখ্যা $p^২$ পাবলৈ হ'লে p টোও যুগ্ম হ'বই লাগিব। মানে p ৰ এটা উৎপাদক হ'ল ২। অৰ্থাৎ $p = ২r$, য'ত r টো এটা অখণ্ড সংখ্যা। এই $p = ২r$ ৰ সম্পৰ্কটো $p^২ = ২q^২$ ত ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাওঁ যে $৪r^২ = ২q^২$, অৰ্থাৎ $২r^২ = q^২$, মানে $q^২$ টো এটা যুগ্ম সংখ্যা। গতিকে q টোও যুগ্ম সংখ্যা। অৰ্থাৎ, q-ৰো এটা উৎপাদক হ'ল ২। গতিকে আমি পালোঁ যে p আৰু q ৰ এটা সাধাৰণ উৎপাদক হ'ল ২, যিটো আমি প্ৰথমে ধৰি লোৱা p আৰু q ৰ যে গসাগু ১ হে, তাৰ পৰিপন্থী। গতিকে আমি এটা স্ববিৰোধী সিদ্ধান্তত উপনীত হ'লো। এই স্ববিৰোধী সিদ্ধান্তৰ মূল হ'ল $\sqrt{২}$ ক পৰিমেয় বুলি ধৰি লোৱাৰ বাবে। সেয়েহে $\sqrt{২}$ পৰিমেয় হ'ব নোৱাৰে, ই অপৰিমেয়হে।

উপৰিউক্ত পদ্ধতিকেই সামান্য ইফাল-সিফাল কৰি কৰণীজাতীয় (surd) সংখ্যাবোৰযে অপৰিমেয় সেয়া প্ৰমাণ কৰিব পাৰি। পিছে π, e আদি সংখ্যাৰ অপৰিমেয়তাৰ প্ৰমাণ $\sqrt{২}$ ৰ নিচিনাকৈ কৰিব নোৱাৰি। হয় স্ববিৰোধী পদ্ধতিটো পৰিৱৰ্ধন কৰিব লাগিব, নহয় এটা বেলেগ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰিব লাগিব। যদিও e সংখ্যাটো জেকব বাৰ্ণলিৰদ্বাৰা ১৬৮৩ চনতে আৱিষ্কৃত হ'ল, ইয়াৰ অপৰিমেয়তা গণিতজ্ঞ অয়লাৰে ১৭৩৭ চনতহে পোনপ্ৰথমবাৰৰ বাবে দিবলৈ সক্ষম হ'ল। অয়লাৰৰ প্ৰমাণটো অৱশ্যে তাৰ সাত বছৰৰ পাছত, ১৭৪৪ চনতহে প্ৰকাশ হৈছিল। আশ্চৰ্যজনকভাৱে অয়লাৰে অবিৰত ভগ্নাংশ (continued fraction) আৰু অৱকলজ সমীকৰণৰ (differential equation) সহায়ত e ৰ অপৰিমেয়তা প্ৰমাণ কৰিছিল। অবিৰত ভগ্নাংশৰদ্বাৰা অয়লাৰেনো কেনেকৈ e ৰ অপৰিমেয়তাত উপনীত হৈছিল তাৰ থূলমূল ধাৰণা বিষয়টোৰ বৰ বিশেষ গভীৰতালৈ নগৈ তলৰ কেইটামান শাখাত আলোচনা কৰা হৈছে।

অবিৰত ভগ্নাংশ আৰু সংখ্যাৰ পৰিমেয়তা-অপৰিমেয়তা

সৰল অবিৰত ভগ্নাংশ (Simple continued fraction) এটাৰ সাধাৰণ ৰূপটো হ'ল

$$A + \cfrac{১}{B + \cfrac{১}{C + \cfrac{১}{D + \cfrac{১}{E + \cfrac{১}{F + \cdots}}}}},$$

য'ত A, B, C, D, E, F, ইত্যাদি হ'ল অখণ্ড সংখ্যা আৰু A ৰ বাহিৰে বাকীবোৰ ধনাত্মক। এই A, B, C, D, E, F, ইত্যাদি সংখ্যাবোৰক সৰল অবিৰত ভগ্নাংশটোৰ আংশিক হৰ (partial denominator) বুলি কোৱা হয়। উল্লেখনীয় যে, সুবিধাৰ বাবে উপৰিউক্ত প্ৰকাশটোক সাধাৰণতে $[A; B, C, D, E, F, \ldots]$ হিচাপে লিখা হয় (কম ঠাই অধিকাৰ কৰে আৰু লিখিবলৈ

বা টাইপ কৰিবলৈ সুবিধাজনক)। যদি সৰল অবিৰত ভগ্নাংশ এটাৰ আংশিক হৰৰ সংখ্যা সসীম হয় তেন্তে তাক সসীম সৰল অবিৰত ভগ্নাংশ (finite simple continued fraction) আৰু আংশিক হৰৰ সংখ্যা অসীম হ'লে অসীম সৰল অবিৰত ভগ্নাংশ (infinite simple continued fraction) বোলা হয়। উল্লেখনীয় যে যিকোনো সসীম সৰল অবিৰত ভগ্নাংশ এটাক সৰল কৰি (মানে simplify কৰি) এটা সাধাৰণ ভগ্নাংশলৈ পৰিৱৰ্তন কৰিব পাৰি, মানে p/q আকাৰলৈ নিব পাৰি। অৰ্থাৎ, যিকোনো সসীম সৰল অবিৰত ভগ্নাংশ এটা আচলতে পৰিমেয় সংখ্যা। একেবাৰে শেষৰ আংশিক হৰৰ পৰা সৰল কৰি আহিলেই p/q আকাৰটো সহজে পাব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে, আমি পাওঁ যে

$$[৩; ৭, ১৫] = ৩ + \cfrac{১}{৭ + \cfrac{১}{১৫}} = ৩ + \cfrac{১}{\cfrac{১০৬}{১৫}} = ৩ + \frac{১৫}{১০৬} = \frac{৩৩৩}{১০৬}।$$

বিপৰীতক্ৰমে, স্কুলৰ পাঠ্যপুথিত পোৱা বিভাজন এলগৰিদম্ (Division Algorithm), মানে

$$\text{ভাজ্য} = \text{ভাগফল} \times \text{ভাজক} + \text{ভাগশেষ},$$
$$(\text{dividend} = \text{quotient} \times \text{divisor} + \text{remainder})$$

সূত্ৰটোৰ ধাৰাবাহিক প্ৰয়োগৰ (যিটো 'ইউক্লিডীয় এলগৰিদম্' হিচাপে পৰিচিত) সহায়ত যিকোনো পৰিমেয় সংখ্যাকে এটা সৰল অবিৰত ভগ্নাংশৰ ৰূপলৈ নিব পাৰি। ধৰা হওক ৩৩৩/১০৬ সংখ্যাটোক সৰল অবিৰত ভগ্নাংশৰ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব লাগে। ভাজ্য $=$ ভাগফল $\times$ ভাজক $+$ ভাগশেষ সূত্ৰটোত প্ৰথম ঢাপত ভাজ্য $=$ ৩৩৩ আৰু ভাজক $=$ ১০৬ লৈ আমি পাওঁ যে $৩৩৩ = ৩ \times ১০৬ + ১৫$। এতিয়া দ্বিতীয় ঢাপত ভাজ্য $=$ ১০৬ আৰু ভাজক $=$ ১৫ লৈ পাওঁ যে $১০৬ = ৭ \times ১৫ + ১$। তৃতীয় ঢাপত ভাজ্য $=$ ১৫ আৰু ভাজক $=$ ১ লৈ পাওঁ $১৫ = ১৫ \times ১ + ০$। যিহেতু এইবাৰ ভাগশেষ ০ পোৱা গ'ল, গতিকে বিভাজন এলগৰিদমৰ ধাৰাবাহিকতাও তাতেই অন্ত পৰিল। গতিকে এলগৰিদমটোৰ ঢাপকেইটা হ'ল

$$৩৩৩ = \mathbf{৩} \times ১০৬ + ১৫$$
$$১০৬ = \mathbf{৭} \times ১৫ + ১$$
$$১৫ = \mathbf{১৫} \times ১ + ০।$$

দেখা যায় যে এই প্ৰক্ৰিয়াত ক্ৰমানুসাৰে পোৱা ভাগফলবোৰেই হ'ল আৰম্ভণিৰ ভাজ্য আৰু ভাজকৰদ্বাৰা সৃষ্ট ভগ্নাংশটোৰ অবিৰত ভগ্নাংশৰ আংশিক হৰ। যিহেতু ভাজ্য $=$ ৩৩৩ আৰু ভাজক $=$ ১০৬ ৰ ক্ষেত্ৰত ক্ৰমানুসাৰে পোৱা ভাগফলবোৰ হৈছে **৩, ৭,** আৰু **১৫**, গতিকে ৩৩৩/১০৬ ৰ সৰল অবিৰত ভগ্নাংশৰ ৰূপটো হ'ব $[৩; ৭, ১৫]$। ঠিক একেদৰে যিকোনো পৰিমেয় সংখ্যাকে ইউক্লিডীয় এলগৰিদমৰ সহায়ত সসীম সৰল অবিৰত ভগ্নাংশত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

ওপৰত কৰা আলোচনাৰ পৰা আমি জানিব পাৰিলো যে যিকোনো সসীম সৰল অবিৰত ভগ্নাংশ এটা পৰিমেয় সংখ্যালৈ পৰিৱৰ্তিত কৰিব পাৰি আৰু যিকোনো পৰিমেয় সংখ্যাকে সসীম সৰল অবিৰত ভগ্নাংশত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। গতিকে এটা সংখ্যাৰ সৰল অবিৰত ভগ্নাংশৰ ৰূপটো যদি অসীম হয় তেন্তে সেই সংখ্যাটো অপৰিমেয় হ'বই লাগিব। **অৰ্থাৎ, আমি পৰিমেয় সংখ্যা আৰু অপৰিমেয় সংখ্যা জানিবৰ নিমিত্তে সততে পাই অহা p/q আকাৰৰ ধাৰণাটোতকৈ বেলেগ ধৰণৰ ধাৰণা জড়িত থকা পদ্ধতি একোটা পালোঁ।** সংক্ষেপতে, সংখ্যা এটাক সসীম সৰল অবিৰত ভগ্নাংশত প্ৰকাশ কৰিব পাৰিলে পৰিমেয় আৰু অসীম সৰল অবিৰত ভগ্নাংশত প্ৰকাশ কৰিব পাৰিলে অপৰিমেয়।

ধৰা হওক এই ধাৰণাৰ আধাৰত $\sqrt{২}$ সংখ্যাটো অপৰিমেয় বুলি প্ৰমাণ কৰিব লাগে। আমি $\sqrt{২}$ -ৰ সৰল অবিৰত ভগ্নাংশৰ ৰূপটো অসীম বুলি নিৰ্ণয় কৰিব লাগে। যিহেতু $\sqrt{২}$ ৰ মানটো ১ আৰু ২ ৰ মাজত আছে (কিয়নো $\sqrt{১} < \sqrt{২} < \sqrt{8}$, অৰ্থাৎ $১ < \sqrt{২} < ২$), গতিকে আমি $\sqrt{২}$ টোক $\sqrt{২} = ১ + (\sqrt{২} - ১)$ বুলি লিখিলে $\sqrt{২} - ১$ টো ১ তকৈ সৰু হ'ব। এতিয়া আমি তলত দিয়া ধৰণে আগবাঢ়িব পাৰোঁ;

$$\sqrt{২} = ১ + (\sqrt{২} - ১) = ১ + \frac{(\sqrt{২} - ১)(\sqrt{২} + ১)}{\sqrt{২} + ১} = ১ + \frac{২ - ১}{\sqrt{২} + ১} = ১ + \frac{১}{\sqrt{২} + ১}। \qquad (৫)$$

যিহেতু $১ < \sqrt{২} < ২$, গতিকে $২ < \sqrt{২}+১ < ৩$ আৰু সেয়েহে

$$\sqrt{২}+১ = ২+(\sqrt{২}-১) = ২+\frac{(\sqrt{২}-১)(\sqrt{২}+১)}{\sqrt{২}+১} = ২+\frac{১}{\sqrt{২}+১}। \tag{৬}$$

উপৰিউক্ত $\sqrt{২}+১$ -ৰ ৰাশিটো সমীকৰণ (৫) ত বহুৱাই পাওঁ যে

$$\sqrt{২} = ১+\cfrac{১}{২+\cfrac{১}{\sqrt{২}+১}}।$$

যদি আকৌ এবাৰ (৬) প্ৰয়োগ কৰা যায়, তেন্তে

$$\sqrt{২} = ১+\cfrac{১}{২+\cfrac{১}{২+\cfrac{১}{\sqrt{২}+১}}}।$$

যদি পুনঃ পুনঃ (৬) প্ৰয়োগ কৰা যায় তেন্তে আমি পাওঁ যে

$$\sqrt{২} = ১+\cfrac{১}{২+\cfrac{১}{২+\cfrac{১}{২+\cfrac{১}{২+\cdots}}}}।$$

অৰ্থাৎ, $\sqrt{২}$-ৰ সৰল অবিৰত ভগ্নাংশৰ ৰূপটো হ'ল $\sqrt{২} = [১;২,২,২,২,\cdots]$, যিটো এটা অসীম সৰল অবিৰত ভগ্নাংশ। গতিকে $\sqrt{২}$ হ'ল এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।

ঠিক একেদৰে $\frac{১+\sqrt{৫}}{২}$, যিটো 'সোণালী অনুপাত' হিচাপে পৰিচিত আৰু গ্ৰীক আখৰ φ -ৰে বুজোৱা হয়, তাৰ অপৰিমেয়তাও সৰল অবিৰত ভগ্নাংশৰ সহায়ত সহজে প্ৰমাণ কৰিব পাৰি। যিহেতু $২ < \sqrt{৫} < ৩$, গতিকে $৩ < ১+\sqrt{৫} < ৪$ আৰু সেয়েহে $১.৫ < \varphi < ২$। গতিকে $\varphi = ১+(\varphi-১)$, য'ত $\varphi-১$ -টো এটা ১ -তকৈ সৰু ধনাত্মক সংখ্যা। এতিয়া,

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{১+\sqrt{৫}}{২} = ১+(\varphi-১) = ১+\left(\frac{১+\sqrt{৫}}{২}-১\right) = ১+\frac{\sqrt{৫}-১}{২} = ১+\frac{(\sqrt{৫}-১)(\sqrt{৫}+১)}{২(\sqrt{৫}+১)}\\ &= ১+\frac{২}{\sqrt{৫}+১} = ১+\cfrac{১}{\cfrac{\sqrt{৫}+১}{২}} = ১+\frac{১}{\varphi}।\end{aligned}$$

গতিকে প্ৰক্ৰিয়াটো পুনঃ পুনঃ প্ৰয়োগ কৰি আমি পাওঁ যে

$$\varphi = ১+\cfrac{১}{১+\cfrac{১}{১+\cfrac{১}{১+\cdots}}}।$$

অৰ্থাৎ, φ-ৰ সৰল অবিৰত ভগ্নাংশৰ ৰূপটো হ'ল $\varphi = [১;১,১,১,\cdots]$, যিটো এটা অসীম সৰল অবিৰত ভগ্নাংশ। গতিকে সোণালী অনুপাত $\varphi = \frac{১+\sqrt{৫}}{২}$ হ'ল এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।

উপৰিউক্ত পদ্ধতিকেই ব্যৱহাৰ কৰি দ্বিঘাত কৰণীজাতীয় (quadratic surd) সংখ্যাবোৰ যে অপৰিমেয় সেয়া প্ৰমাণ কৰিব পাৰি। পিছে e, π, আদি সংখ্যাৰ অপৰিমেয়তাৰ প্ৰমাণ একেই পদ্ধতিৰে কৰিব নোৱাৰি। কাৰণ $\sqrt{২}$, φ, আদিক সৰল অবিৰত ভগ্নাংশলৈ ৰূপান্তৰ কৰোঁতে যেনেকৈ $\sqrt{২}-১$, $\sqrt{৫}-১$, আদিক সংযুক্ত কৰণীৰে (conjugate surd) পূৰণ কৰি লব/হৰৰ পৰিমেয়কৰণ (rationalization of the numerator/denominator) কৰা হৈছিল, তেনেধৰণৰ পৰিমেয়কৰণ e, π, আদিৰ ক্ষেত্ৰত কৰিব নোৱাৰি।

অপৰিমেয় e: অয়লাৰৰ প্ৰমাণ

অবিৰত ভগ্নাংশ সম্পৰ্কীয় অয়লাৰৰ প্ৰথমখন গৱেষণা-পত্ৰ আছিল ‘De Fractionibus Continuis Dissertatio’, যিখন তেওঁ ১৭৩৭ চনত লিখিছিল যদিও ১৭৪৪ চনতহে National Academy of St. Petersburg-ৰ দ্বাৰা প্ৰকাশিত ‘Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae’ নামৰ পত্ৰিকাত প্ৰকাশ হৈছিল। উল্লেখনীয় যে সেইখনৰ Myra F. Wyman আৰু Bostwick F. Wyman-ই ইংৰাজীলৈ কৰা ভাঙনি ‘An essay on continued fractions’ গৱেষণা-পত্ৰিকা ‘Mathematical Systems Theory’-ত ১৯৮৫ চনত প্ৰকাশ হৈছিল (প্ৰসঙ্গ সূত্ৰ [১])। এই গৱেষণা-পত্ৰতে অয়লাৰে e যে অপৰিমেয় সেয়া প্ৰমাণ কৰিছিল (প্ৰসঙ্গ সূত্ৰ [৩])। অয়লাৰে প্ৰথমে e, $\sqrt{e}$, $(e-১)/২$ আদিৰ আসন্নমানৰ সৰল অবিৰত ভগ্নাংশবোৰৰ নিৰ্দিষ্ট আৰ্হি একোটা লক্ষ্য কৰিলে। যথা,

$$\begin{aligned}
e &\approx ২.৭১৮২৮১৮২৮৪৫৯০৪\\
&= ২+\cfrac{১}{১+\cfrac{১}{২+\cfrac{১}{১+\cfrac{১}{১+\cfrac{১}{৪+\cfrac{১}{১+\cfrac{১}{১+\cfrac{১}{৬+\cfrac{১}{১+\text{etc.}}}}}}}}}},\\
\sqrt{e} &\approx ১.৬৪৮৭২১২৭০৭\\
&= ১+\cfrac{১}{১+\cfrac{১}{১+\cfrac{১}{১+\cfrac{১}{৫+\cfrac{১}{১+\cfrac{১}{১+\cfrac{১}{৯+\cfrac{১}{১+\cfrac{১}{১+\cfrac{১}{১৩+\text{etc.}}}}}}}}}}},\\
\frac{e-১}{২} &\approx ০.৮৫৯১১৪০৯১৪২২৯৫\\
&= ০+\cfrac{১}{১+\cfrac{১}{৬+\cfrac{১}{১০+\cfrac{১}{১৪+\cfrac{১}{১৮+\cfrac{১}{২২+\cfrac{১}{২৬+\cfrac{১}{৩০+\cfrac{১}{৩৪+\cfrac{১}{৩৮+\text{etc.}}}}}}}}}}}।
\end{aligned}$$

উপৰিউক্ত তিনিওটা অবিৰত ভগ্নাংশৰ প্ৰসাৰণত etc. শব্দটো লিখা হৈছে যদিও প্ৰসাৰণকেইটা কিন্তু সসীমহে (কিয়নো ২.৭১৮২৮১৮২৮৪৫৯০৪, ১.৬৪৮৭২১২৭০৭ আৰু ০.৮৫৯১১৪০৯১৪২২৯৫ পৰিমেয় সংখ্যাহে)। প্ৰথম প্ৰকাশটোৰ আংশিক হৰবোৰৰ ক্ৰম ১, ২, ১, ১, ৪, ১, ১, ৬, ১- ৰ ২, ৪, ৬, সমান্তৰ প্ৰগতিত আছে যদিও মাজে মাজে দুটাকৈ ১ সোমাই আছে। ঠিক তেনেকৈ দ্বিতীয় প্ৰকাশটোৰ আংশিক হৰবোৰৰ ক্ৰম $১, ১, ১, ৫, ১, ১, ৯, ১, ১, ১৩$ -ৰ $১, ৫, ৯, ১৩$, সমান্তৰ প্ৰগতিত আছে যদিও সিহঁতৰ মাজতো দুটাকৈ ১ সোমাই আছে। কিন্তু তৃতীয় প্ৰকাশটোৰ আংশিক হৰবোৰৰ দ্বিতীয় স্থানৰ পৰা আৰম্ভ হোৱা ক্ৰমে $৬, ১০, ১৪, ১৮, ২২, ২৬, ৩০, ৩৪, ৩৮$ সমান্তৰ প্ৰগতিত আছে। ইয়াৰ পিছত অয়লাৰে আচল e, $\sqrt{e}$, $\frac{e-১}{২}$ আদিৰ সৰল অবিৰত ভগ্নাংশবোৰ যে অসীম সেয়া প্ৰমাণ কৰিলে। আমোদজনকভাৱে সেয়া তেওঁ অৱকলজ সমীকৰণৰ (Differential Equation) সহায় লৈ সম্পন্ন কৰিলে। সবিশেষ বিৱৰণৰ বাবে আগ্ৰহী পাঠকে ইতিমধ্যে উল্লেখ কৰা অয়লাৰৰ গৱেষণা-পত্ৰখন অথবা ভাঙণিখন পঢ়িব পাৰে। তলত অয়লাৰৰ কামৰ সাৰাংশহে দিয়া হ'ল।

অবিৰত ভগ্নাংশৰ বিশ্লেষণেৰে অয়লাৰে দেখুৱালে যে যদিহে

$$q = \frac{a}{p} + \cfrac{১}{\cfrac{৩a}{p} + \cfrac{১}{\cfrac{৫a}{p} + \cfrac{১}{\cfrac{৭a}{p} + \cfrac{১}{\cfrac{৯a}{p} + \cdots}}}}, \qquad (৭)$$

তেন্তে $adq + q^২dp = dp$ অৱকলজ সমীকৰণটো সিদ্ধ হয়। আকৌ, এই অৱকলজ সমীকৰণটোৰ চলক নিলগন কৰিলে হয়

$$\frac{adq}{১ - q^২} = dp,$$

যাক অনুকলন কৰি আমি পাওঁ যে

$$\frac{a}{২} \log \frac{১+q}{১-q} = p \text{ ।}$$

অলপ সৰল কৰিলে পোৱা যায়

$$e^{২p/a} = \frac{q+১}{q-১} = ১ + \frac{২}{q-১} \text{ ।} \qquad (৮)$$

এতিয়া (৭) -ৰ q-ৰ প্ৰসাৰণ (৮)-ত ব্যৱহাৰ কৰি পোৱা যায়

$$e^{২p/a} = 1 + \cfrac{২}{\cfrac{a-p}{p} + \cfrac{১}{\cfrac{৩a}{p} + \cfrac{১}{\cfrac{৫a}{p} + \cfrac{১}{\cfrac{৭a}{p} + \cfrac{১}{\cfrac{৯a}{p} + \cdots}}}}} \text{ ।} \qquad (৯)$$

উপৰিউক্ত প্ৰসাৰণত যদিহে $p = ১$ আৰু $a = ২$ লোৱা যায়, তেন্তে

$$e = ১ + \cfrac{২}{১ + \cfrac{১}{৬ + \cfrac{১}{১০ + \cfrac{১}{১৪ + \cfrac{১}{১৮ + \cdots}}}}} \text{ ।}$$

অৰ্থাৎ,

$$\frac{e-১}{২} = ০ + \cfrac{১}{১ + \cfrac{১}{৬ + \cfrac{১}{১০ + \cfrac{১}{১৪ + \cfrac{১}{১৮ + \cdots}}}}},$$

যিটো হ'ল $\frac{e-১}{২}$ -ৰ অসীম সৰল অবিৰত ভগ্নাংশ। গতিকে $\frac{e-১}{২}$ অপৰিমেয়। যিহেতু $\frac{e-১}{২}$ অপৰিমেয়, গতিকে e ও অপৰিমেয়। উল্লেখনীয় যে (৯)-ত a আৰু p-ৰ বেলেগ বেলেগ মান বহুৱাই e-ৰ অন্যান্য ঘাত কিছুমানো অপৰিমেয় বুলি দেখুৱাব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে, $p=১$, $a=৪$ লৈ $\sqrt{e}$ আৰু $p=১$, $a=৬$ লৈ $e^{১/৩}$ যে অপৰিমেয় সহজে দেখুৱাব পাৰি। গতিকে অয়লাৰে e-ৰ অপৰিমেয়তা প্ৰমাণ কৰিবলৈ গৈ তাৰ সাধাৰণ ঘাতৰো অপৰিমেয়তা প্ৰমাণিত হোৱাকৈ পদ্ধতি আৱিষ্কাৰ কৰিলে। ইয়াৰ দ্বাৰাই মহান গণিতজ্ঞগৰাকীৰ অসাধাৰণ চিন্তাশক্তিৰ আভাস পাব পাৰি।

স্ববিৰোধী পদ্ধতিৰদ্বাৰা e-ৰ অপৰিমেয়তা

প্ৰখ্যাত ফৰাচী গণিতজ্ঞ যোচেফ ফুৰিয়েই (Jean-Baptiste Joseph Fourier, ১৭৬৮–১৮৩০) প্ৰথমবাৰৰ বাবে স্ববিৰোধী পদ্ধতিৰদ্বাৰা e-ৰ অপৰিমেয়তা প্ৰমাণ কৰে। উল্লেখযোগ্য যে ফুৰিয়েইৰ প্ৰমাণটো আন এগৰাকী সমসাময়িক ফৰাচী গণিতজ্ঞ নিকোলাচ ডা ষ্টেনভিলেহে (প্ৰসঙ্গ সূত্ৰ [4]) এখন কিতাপত ১৮১৫ চনত প্ৰথম প্ৰকাশ কৰিছিল। ফুৰিয়েইৰ প্ৰমাণটোৰ সামান্য উন্নতিসাধনেৰে ১৯৮৭ চনত মেকডিভিট আৰু য়ানাগিচাৱাই (প্ৰসঙ্গ সূত্ৰ [২]) আগবঢ়োৱা প্ৰমাণটো তলত আগবঢ়োৱা হ'ল।

প্ৰথমে আমি মন কৰোঁ যে e টো হ'ল ২-তকৈ ডাঙৰ কিন্তু ৩-তকৈ সৰু এটা সংখ্যা। যিহেতু ২ আৰু ৩ ৰ মাজত কোনো অখণ্ড সংখ্যা নাই, গতিকে e অখণ্ড সংখ্যা নহয়। ধৰা হওক e পৰিমেয় আৰু $e = p/q$, য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা আৰু q শূন্য নহয়। মন কৰিবলগীয়া যে q টো ১ হ'ব নোৱাৰে, কাৰণ $q=১$ হ'লে $e=p$ হ'ব লাগিব আৰু তেতিয়া p টো যিহেতু এটা অখণ্ড সংখ্যা গতিকে e টোও অখণ্ড সংখ্যা হ'ব, যিটো শুদ্ধ নহয়। গতিকে q এটা ১ তকৈ ডাঙৰ অখণ্ড সংখ্যা। এটা সংখ্যা x তলত দিয়া ধৰণে বিবেচনা কৰা হওক;

$$x = q!\left\{e - \left(১ + \frac{১}{১!} + \frac{১}{২!} + \frac{১}{৩!} + \cdots + \frac{১}{(q-১)!} + \frac{১}{q!}\right)\right\}। \qquad (১০)$$

এতিয়া (১০)-ত $e = p/q$ বহুৱাই পাওঁ যে

$$\begin{aligned} x &= q!\left\{\frac{p}{q} - \left(১ + \frac{১}{১!} + \frac{১}{২!} + \frac{১}{৩!} + \cdots + \frac{১}{(q-১)!} + \frac{১}{q!}\right)\right\} \\ &= p \times (q-১)! - \left(q! + \frac{q!}{১!} + \frac{q!}{২!} + \frac{q!}{৩!} + \cdots + \frac{q!}{(q-১)!} + \frac{q!}{q!}\right) \\ &= p \times (q-১)! - \{q! + q! + q \times (q-১) \times \cdots ৪ \times ৩ + q \times (q-১) \times \cdots \times ৫ \times ৪ + \cdots + q + ১\}। \end{aligned}$$

যিহেতু শেষৰ প্ৰকাশটোৰ প্ৰতিটো ৰাশিয়েই একোটা অখণ্ড সংখ্যা, গতিকে x এটা অখণ্ড সংখ্যা।

পুনৰ (১০)-ত e -ৰ সূত্ৰ (১) বহুৱাই পাওঁ যে

$$\begin{aligned} x &= q!\left\{\left(১ + \frac{১}{১!} + \frac{১}{২!} + \frac{১}{৩!} + \cdots + \frac{১}{(q-১)!} + \frac{১}{q!} + \frac{১}{(q+১)!}\cdots\right)\right. \\ &\quad \left. - \left(১ + \frac{১}{১!} + \frac{১}{২!} + \frac{১}{৩!} + \cdots + \frac{১}{(q-১)!} + \frac{১}{q!}\right)\right\} \\ &= \frac{q!}{(q+১)!} + \frac{q!}{(q+২)!} + \frac{q!}{(q+৩)!} + \frac{q!}{(q+৪)!} + \cdots \\ &= \frac{১}{(q+১)} + \frac{১}{(q+১)(q+২)} + \frac{১}{(q+১)(q+২)(q+৩)} + \frac{১}{(q+১)(q+২)(q+৩)(q+৪)} + \cdots \text{ ।} \end{aligned}$$

যিহেতু শেষৰ প্ৰকাশটোৰ প্ৰতিটো ৰাশিয়েই ধনাত্মক, গতিকে x-ও ধনাত্মক। গতিকে আমি পালো যে x হ'ল এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। আকৌ, উপৰিউক্ত সমতাৰ দুয়োফালে $q+১$-ৰে পূৰণ কৰি আৰু

$$\frac{১}{q+১} > \frac{১}{q+২}, \quad \frac{১}{q+২} > \frac{১}{q+৩}, \quad \frac{১}{q+৩} > \frac{১}{q+৪},$$

ইত্যাদি অসমতাবোৰ প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ যে

$$\begin{aligned} x(q+১) &= ১ + \frac{১}{(q+২)} + \frac{১}{(q+২)(q+৩)} + \frac{১}{(q+২)(q+৩)(q+৪)} + \cdots \\ &< ১ + \frac{১}{(q+১)} + \frac{১}{(q+১)(q+২)} + \frac{১}{(q+১)(q+২)(q+৩)} + \cdots \\ &< ১ + x \text{ ।} \end{aligned}$$

সেয়েহে, $xq + x < ১ + x$, অৰ্থাৎ, $xq < ১$। যিহেতু x আৰু q দুয়োটাই ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, সেয়েহে সিহঁত দুটাৰ পূৰণফল ১-তকৈ সৰু হোৱাটো অসম্ভৱ। যিহেতু e সংখ্যাটো পৰিমেয় বুলি ধৰি লোৱাৰ বাবেহে এনে এটা অসম্ভৱ সিদ্ধান্ত পোৱা হৈছে, গতিকে e পৰিমেয় হ'বই নোৱাৰে। অৰ্থাৎ, e যে অপৰিমেয় সেয়া প্ৰমাণিত হ'ল।

প্ৰসঙ্গ সূচী

[১] Leonhard Euler, De Fractionibus Continuis Dissertatio, *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, Volume 9 (1744) 98–137; Translated into English by Myra F. Wyman and Bostwick F. Wyman as "An Essay on Continued Fractions", *Mathematical Systems Theory*, Volume 18 (1985) 295–328.

[২] A. R. G. MacDivitt and Yukio Yanagisawa, An elementary proof that e is irrational, *The Mathematical Gazette*, Volume 71, Issue 457 (1987), 217.

[৩] Ed Sandifer, Who proved e is irrational?, Chapter 32 of *How Euler Did It*, The American Mathematical Monthly, 2007.

[৪] Nicolas Dominique Marie Janot de Stainville, *Mélanges d'analyse Algébrique et de Géometries* (French), Veuve Courcier, Paris, (1815) 340–341.