গণিতৰ দৃষ্টিত সমাজ

ড° অমল চন্দ্ৰ চৌধুৰী • অনুবাদ : ড° দিলীপ শৰ্মা

এই লেখাটো নৱম সংখ্যাৰ 'গণিত বিকাশ'ত প্ৰকাশ পাইছিল। তেতিয়া 'গণিত বিকাশ'ৰ সম্পাদক আছিল ড° দিলীপ শৰ্মা। তেওঁ লেখাটোৰ সৈতে দিয়া দুটা টোকা তলত একেলগে দিয়া হ'ল:

ড° অমল চন্দ্ৰ চৌধুৰী কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ৰ মৌলিক গণিত বিজ্ঞান বিভাগৰ অধ্যাপক আৰু মুৰব্বী আছিল। 'গণিতৰ চক্ষে সমাজ' (মৰণোত্তৰ প্ৰকাশিত) শীৰ্ষক লেখাটো প্ৰকাশ পায় 'গণিত'ৰ ২য় বৰ্ষ, ২য় সংখ্যাত (পশ্চিমবংগ ৰাজ্য পুস্তক পৰ্ষদ); ই আছিল ড° চৌধুৰীৰ কোনো বক্তৃতাৰ অংশবিশেষ। লেখাটোৰ মুকলি ভাঙনি 'গণিত বিকাশ'ৰ পাঠক-পাঠিকাসকললৈ আগবঢ়োৱা হ'ল। বাংলাৰ পৰা অসমীয়ালৈ তৰ্জমা কৰিলে সম্পাদকে। প্ৰবন্ধটো প্ৰকাশ কৰিবলৈ অনুমতি দিয়া বাবে পশ্চিমবংগ ৰাজ্য পুস্তক পৰ্ষদৰ ওচৰত সম্পাদক কৃতজ্ঞ।

কৃষ্টি মানেনো কি? – দুই এজনক সোধাত উত্তৰ দিলে– কৃষ্টি মানে culture; আকৌ culture মানেনো কি বুলি সোধাত উত্তৰ পোৱা গ'ল– কৃষ্টি। আমাৰ দৰে গণিতৰ মানুহে এনে ধৰণৰ উত্তৰৰ পৰা একোকে নুবুজে। তেতিয়া এজন ব্যাকৰণৰ পণ্ডিতক সোধাত তেখেতে ক'লে যে কৃষ্টি শব্দটো আহিছে কৃষ্ ধাতুৰ পৰা: কৃষ্ + ক্তিন্। কৃষ্ ধাতু– অৰ্থাৎ কৰ্ষণ কৰা বা চহোৱা। তেতিয়া ভাবিবলৈ ধৰিলোঁ– চহোৱা-চহাম ঠিকেই, পিছে কি চহাম বা ক'ত চহাম? দ্বিতীয় প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লগে লগেই পোৱা গ'ল– ক'ত চহাম? – কিয়? – সমাজত। কিন্তু প্ৰথমটোৰ উত্তৰৰ উৱাদিহ নাপালোঁ। কি চহাম? বহুতো ভাবি-গুণি ঠিক কৰিলোঁ– চহাব লাগিব সামাজিক ভিত্তিৰ মূলগত সূত্ৰবোৰ। এই কথা মনলৈ অহাৰ লগে লগেই মোৰ গাণিতিক মনে এই বস্তুটোক আধুনিক গণিতৰ চিন্তাধাৰাত পেলাই ভাবিবলৈ ধৰিলে। তাৰেই কথা আজি আপোনাসৱৰ আগত বেকত কৰিব খুজিছে। তাৰ আগেয়ে আপোনালোকৰ লগত গণিতৰ চিন্তাধাৰাৰ পৰিচয় কৰাই দিওঁ।

প্ৰথমতে যুক্তিতত্ত্বৰ কথাই ধৰা যাওক। এটি ভাৱ (বা বাক্য) হ'ল কিছুমান শব্দসমষ্টি যাৰ দ্বাৰা আমি কোনো কিছু হৃদয়ংগম কৰোঁ। এইবোৰ ভাৱ একত্ৰিত কৰা হয় 'আৰু', 'বা', 'যদি তেন্তে' –এই তিনিটা শব্দৰদ্বাৰা। কোনো ভাৱক অস্বীকাৰ কৰা হয়– 'নহয়'ৰ জৰিয়তে। অৱশ্যে এই তিনিটা সংযুক্তকাৰক আৰু অস্বীকাৰ্য্য চিহ্ন স্বতন্ত্ৰ নহয়, প্ৰকৃতপক্ষে এইবোৰক এক চিহ্নৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰা যায়। এতিয়া যুক্তিতত্ত্বক অতি সহজে বীজগণিতত পৰিণত কৰা যায় যদিহে আমি ধৰোঁ:

আৰু	$+$	যোগ চিন
বা	$\circ$	পূৰণ চিন
নহয়	$'$	প্ৰাইম।

যথা p আৰু q, p বা q, p' (p নহয়)। এইদৰে পোনতে এৰিষ্ট'টলে প্ৰথমে যুক্তিশাস্ত্ৰৰ অৱতাৰণা কৰে, পাছলৈ এয়া সংশোধন কৰি যুক্তিশাস্ত্ৰ বীজগণিতলৈ পৰিণত কৰে ইংৰাজ গণিতজ্ঞ জৰ্জ বুলে (George Boole)। এইবাবেই এই যুক্তিশাস্ত্ৰক বুলৰ বীজগণিত বোলে। সামাজিক জীৱনত সাধাৰণতঃ বুলৰ বীজগণিত আমি ব্যৱহাৰ কৰো; এয়া আমাৰ শিক্ষাৰ ফল।

এই বীজগণিতত আমি পাওঁ যে $p'' = p$, অৰ্থাৎ "নহয় নহয়" মানে "হয়"। বোধকৰো জানে যে, বিয়া-সবাহত দৈ মিঠাই "নালাগে নালাগে" বুলি ক'লে দিব লগাকে বুজায়। ইয়াৰ ফল এয়াই যে যদি কোনো ভাৱৰ অস্বীকাৰ্য ভুল প্ৰমাণ কৰা যায়,

সেই ভাৱক ঠিক বুলি ধৰিব লাগিব। কিন্তু অনুধাৱন কৰিলে দেখা যায় যে এই যুক্তি ঠিক নহয়। কাৰণ এই ফুলটো ৰঙা নহয় – এই কথাটো যদি আমি ভুল বুলি প্ৰমাণ কৰোঁ, তাৰ অৰ্থ যে এই ফুলটো ৰঙা –সেয়া নহয়। যি যুক্তিশাস্ত্ৰত

"নহয় নহয়" = "হয়",

এই স্বতঃসিদ্ধ অস্বীকাৰ কৰা হয়, তাক কোৱা হয় intuitionistic logic.

এই যুক্তিবিদ্যাৰ প্ৰৱৰ্তক ব্ৰাউৱাৰ (Brouwer), এইবাবে এওঁৰ বীজগণিতক ব্ৰাউৱাৰৰ বীজগণিত বোলে। "নহয় নহয়" আৰু "হয়"ৰ মাজত কিমান প্ৰকাৰ থাকিব পাৰে – এই লৈ বিভিন্ন ধৰণৰ যুক্তিবিদ্যা আছে। যদি ধৰণ নিৰ্দিষ্ট সংখ্যক হয়, তেনেহ'লে এই যুক্তিবিদ্যাক modal logic বোলা হয়।

যদি ধৰণ অসংখ্য হয়, তেনেহ'লে সেই যুক্তিবিদ্যাক সম্ভাৱিতা (probability) বোলে।

সামাজিক জীৱনত যদিও আমি সাধাৰণতে বুলৰ বীজগণিত ব্যৱহাৰ কৰোঁ, তথাপি, মোৰ ধাৰণা হয় যে অন্যান্য প্ৰকাৰৰ যুক্তিবিদ্যা, বিশেষকৈ সম্ভাৱিতা আমি ব্যৱহাৰ কৰা উচিত।

গণিতৰ এটা বিষয় আপোনালোক প্ৰায় সকলোৱে পঢ়িছে, সেয়া হ'ল ইউক্লিডীয় জ্যামিতি। ইয়াত দেখিছে যে প্ৰথমে কিছুমান স্বতঃসিদ্ধৰে আমি আৰম্ভ কৰোঁ। সকলো ধৰণৰ গণিত, আনকি যুক্তিবিদ্যাও এনেধৰণে আৰম্ভ কৰিব লাগে। কাৰণ সেয়া নকৰিলে যদি অনবৰত "কিয়" – এই প্ৰশ্ন কৰা যায়, তেনেহ'লে এই "কিয়"ৰ শেষ নাই। এই "কিয়"ৰ বিপদৰ পৰা হাত সাৰিবলৈকে কিছুমান স্বতঃসিদ্ধ ধৰি লোৱা হয়। তাৰপাছত বুলৰ বীজগণিতৰ সহায়ত বিভিন্ন ধৰণৰ উপপাদ্য (theorem) প্ৰমাণ কৰে। এনেদৰে গণিতৰ বিষয় প্ৰস্তুত কৰাকে বোলে 'axiomatic method'। গণিতৰ এই চিন্তাধাৰাৰ প্ৰধান প্ৰৱৰ্তক হ'ল ডেভিদ হিলবাৰ্ট (David Hilbert)।

এই চিন্তা-প্ৰণালীত কিছুমান সংজ্ঞাৰদ্ধ শব্দ (undefined terms) (অৰ্থ আৰোপ নকৰাকৈ) গ্ৰহণ কৰা হয়; পাছত এই শব্দবোৰৰ দ্বাৰা অন্য শব্দৰ অৰ্থ প্ৰকাশ কৰা হয় (defined terms)। এই অৰ্থ প্ৰকাশক বাক্যবোৰক বোলে সংজ্ঞা (definition)। এতিয়া এই অৰ্থপূৰ্ণ শব্দ (defined term) আৰু অসংজ্ঞাৰদ্ধ শব্দৰ (undefined term) সহায়ত কিছুমান ভাৱ প্ৰকাশ কৰা হয়। এই ভাৱবোৰক আদিম ভাৱ বা axioms বোলা হয়। এটা উদাহৰণ দিয়া যাওক:

আমাৰ সামাজিক জীৱনত অসংজ্ঞাৰদ্ধ (undefined) শব্দ কিছুমান হ'ল 'সম্পত্তি', 'পাপ', 'গ্ৰহণ কৰা'। চুৰ কৰা, অৰ্থাৎ 'আনৰ সম্পত্তি নোকাৰাকৈ গ্ৰহণ কৰা' এটা সংজ্ঞাৰদ্ধ শব্দ (defined term)। 'চুৰ কৰা পাপ' এটা আদিম ভাৱ বা axiom.

গণিতত এইবোৰ axiom ৰ পৰা পূৰ্বোক্ত যুক্তিবিদ্যাৰ সহায়ত কিছুমান উক্তি (statement) প্ৰমাণ কৰা হয়। এনেধৰণৰ উক্তিবোৰক theorem বোলে। Theorem ৰ সমষ্টিক গণিতৰ একোটাহঁত বিষয় বোলে।

কিন্তু এনেদৰে গণিতৰ একোটাহঁত বিষয় প্ৰস্তুত কৰিবলৈ হ'লে অনেক সাৱধানতা অৱলম্বন কৰা প্ৰয়োজন। প্ৰথমতে চাব লাগিব, axiom বোৰ স্বতন্ত্ৰ (independent) হয়নে নহয়, দ্বিতীয়তে চাব লাগিব এই axiom বোৰ সুসংগত (consistent) আৰু সম্পূৰ্ণ (complete) হয়নে নহয়। এইবাবে আমি বিষয়টোৰ এটা model প্ৰস্তুত কৰিব লাগে। আৰু প্ৰত্যেক axiom বাদ দি অৱশিষ্ট axiom লৈ এটা বিষয় প্ৰস্তুত কৰিব লাগে। যেনে, ইউক্লিডীয় জ্যামিতিৰ parallel axiom বাদ দি জ্যামিতি প্ৰস্তুত কৰিলে non-Euclidean geometry পোৱা যায়। এনেদৰে non-Pascalian geometry, non-Desarguesian geometry, Matuz geometry আছে।

এক থূপ axioms ক সুসংগত বুলি কোৱা হয় যদি কোনো ধৰণৰ উক্তি একেলগে প্ৰমাণ আৰু অপ্ৰমাণ কৰিব পৰা নাযায়।

এই axioms বোৰক সম্পূৰ্ণ বুলি কোৱা হয় যদি প্ৰতিটো উক্তিক (এই বিষয়ৰ) হয় প্ৰমাণ নহয় অপ্ৰমাণ কৰা সম্ভৱ।

যাওক, মই আৰু বেছি গাণিতিক চিন্তাধাৰা সম্বন্ধে ক'ব নোখোজোঁ। এতিয়া আমাৰ সামাজিক জীৱন আৰু কৃষ্টিৰ কথালৈ উভতি আহোঁহক।

মোৰ ধাৰণা হয়, আমাৰ সমাজ-প্ৰণালী এটা গণিতৰে বিষয়, যদিও এই বিষয়টো এতিয়ালৈকে কোনেও formulate কৰা নাই। পূৰ্বোক্ত উপায়ে কিছুমান অসংজ্ঞাৰদ্ধ শব্দ আৰু axiom ৰ সহায়ত এই সমাজ-জীৱন প্ৰস্তুত কৰা হৈছে।

কিছুমান অসংজ্ঞাৰদ্ধ শব্দ: সম্পত্তি, স্ত্ৰী, শত্ৰু, সতীত্ব।

কিছুমান সংজ্ঞাৰদ্ধ শব্দ: পিতা, পুত্ৰ, কন্যা, জমিদাৰ, কৃষক ইত্যাদি।

কিছুমান axioms: মিছা কথা কোৱা পাপ, চুৰ কৰা পাপ ইত্যাদি।

মই যে ইতিপূৰ্বে চহোৱাৰ কথা কৈছোঁ, সেয়া হৈছে সমাজৰ বুকুত এই axioms বোৰ চহাব লাগিব।

সমাজতত্ত্ব axiomatize কৰাৰ চেষ্টা মোৰ মনলৈ আগেয়েও আহিছিল– Bible ৰ Ten Commandments ৰ কথা প্ৰথমে আহিছিল। চাণক্য শ্লোকত আমি বহুতো theorems পাওঁ। পঞ্চতন্ত্ৰ আৰু হিতোপদেশত বহুতো theorems model ৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা হৈছে।

অৱশ্যে axiom যে মাথোঁ একেটাই হ'ব লাগিব, সেয়া নহয়। হয়তো বহু সংখ্যক আৰু আনকি অসংখ্যও হ'ব পাৰে। সমস্ত axioms এতিয়াও ঠিক কৰা হোৱা নাই। বহুদিনৰ অভিজ্ঞতা আৰু বহু চিন্তাৰ ফলত এই axioms বোৰ ঠিক কৰা হৈছে।

এইদৰে কিছুমান axioms লৈ একোখন সমাজ চলি আহিছে। কিন্তু axioms প্ৰণালী সম্পূৰ্ণ (complete) নহয় বাবে নানা ধৰণৰ পৰস্পৰবিৰোধী theorems প্ৰমাণিত হয়। ফলত সমাজত অৰাজকতাই গা কৰি উঠে। তেতিয়া নতুন axiom প্ৰয়োগ (introduce) কৰাৰ প্ৰয়োজন হয়। এই অৱস্থাকে আমি বিপ্লৱ (revolution) বুলি কওঁ। যদি এই axiom পুৰণি axiom বোৰৰ অবিৰোধী (compatible) হয়, তেতিয়া বিপ্লৱটো শান্তিপূৰ্ণ (সাংবিধানিক) হয়, আৰু যদি নহয়, তেনেহ'লে পুৰণি axiom বোৰ পৰিৱৰ্তন কৰা প্ৰয়োজন হ'ব আৰু এই পুৰণি axiom বোৰ সলনি কৰিবলৈ গ'লেই বিশৃংখলা আহি পৰে। সেয়ে কোনো নতুন axiom প্ৰয়োগ কৰিবলৈ হ'লে, এটা সম্পূৰ্ণ axioms ৰ থূপ লৈ তাৰ model প্ৰস্তুত কৰি, যদি axiom বোৰ সম্পূৰ্ণ সুসংগত হয়, তেতিয়াহে এইবোৰ নতুন axiom লৈ সমাজ গঠন কৰিব পাৰি।

যেনেদৰে জ্যামিতিত বিভিন্ন systems of axioms লৈ বিভিন্ন জ্যামিতি আছে; সেইদৰে বিভিন্ন system of axioms লৈ বিভিন্ন সমাজ গঠন কৰিব পাৰি। এখন আনখনতকৈ ভাল, এই মন্তব্য কৰা যুক্তিসংগত নহয়। হয়তো হ'ব পাৰে যে এখন সমাজ আন এখনতকৈ বহু বেছি axiom লৈ গঠিত হৈছে। যিমানেই বেছি axiom লৈ সমাজ গঠিত হয়, সিমানেই সেই সমাজ complex হৈ পৰে; আমি কওঁ সেই সমাজৰ কৃষ্টি বা culture ওখ খাপৰ।

$$n = \sum_{i\le n} 1.$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i\le n}\sum_{j\le i} 1 = \sum_{j\le i\le n} 1.$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i\le n}\sum_{a\le i}\sum_{b\le i} 1 = \sum_{1\le a,b\le i\le n} 1.$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i\le n}\sum_{a_1\le i}\sum_{a_2\le i}\cdots\sum_{a_k\le i} 1 = \sum_{1\le a_1,a_2,\ldots,a_k\le i\le n} 1.$$

ইয়াৰ একেবাৰে তলৰ তিনিটা সমতাৰ প্ৰতিটোলৈকে ভালকৈ মন কৰিলে দেখা যায় যে ইহঁতে বীজগণিতীয় প্ৰশ্ন একোটাক বিন্যাসিক প্ৰশ্নলৈ ৰূপান্তৰিত কৰিছে। প্ৰতিটোৰে সমান চিনৰ বাওঁপিনে আছে নিৰ্দিষ্ট আৰ্হিত থকা কিছুমান পদৰ যোগফল উলিওৱাৰ কথা। আনহাতে সমান চিনৰ সোঁপিনে আছে নিৰ্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যৰে বান্ধ খাই থকা কেইটামান সংখ্যাক কিমান ধৰণে বাচি উলিয়াব পাৰি তাৰ কথা।

তথ্যসূত্ৰ: Enrique Treviño. A short proof of a sum of powers formula. *The American Mathematical Monthly*, 125(7):659–659, 2018.