সংস্থিতি বিজ্ঞানৰ আদিপাঠ

অধ্যাপক ধীৰেণ কুমাৰ বাছনেট

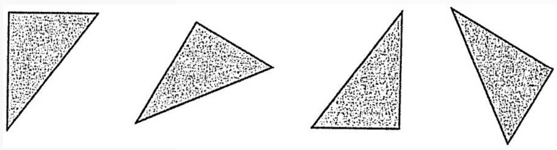
তেজপুৰ বিশ্ববিদ্যালয়, তেজপুৰ, অসম

Topology (সংস্থিতি বিজ্ঞান) হৈছে গণিত শিক্ষাৰ এটা অতি গুৰুত্বপূৰ্ণ আৰু অভিন্ন অংগ। 'Topology' শব্দটো হৈছে এটা গ্ৰীক (Greek) শব্দ, যিটো আন দুটা গ্ৰীক শব্দ 'Topos' মানে স্থান (place) আৰু 'logos' মানে অধ্যয়ন (study)-ৰ সমষ্টি। সংস্থিতি বিজ্ঞান বা Topology ৰ বিষয়ে কিছু কথা জনাৰ আগতে আমি প্ৰথমতে এইটো জানি লওঁ যে, গণিত শিক্ষাৰ এই গুৰুত্বপূৰ্ণ অংগটোত কিহৰ বিষয়ে বা কি অধ্যয়ন কৰা হয়। আৰম্ভ কৰোঁ এটা সাধাৰণ প্ৰশ্নৰ পৰা। তলৰ ছবিবোৰৰ কোনটো বাকীবোৰতকৈ পৃথক?

চিত্ৰ - 1

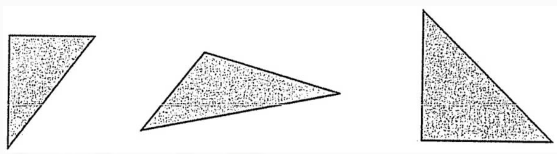
উত্তৰটো অতি সহজ, সেইটো হ'ল শেষৰটো। কিন্তু এইটো বুজাটো সহজ নহয় যে বাকী ছবিকেইটাৰনো এনে কি সাধাৰণ বৈশিষ্ট্য আছে যিটো শেষৰটোৰ নাই। ইয়াৰ এটা সন্তোষজনক ব্যাখ্যা Topology বা সংস্থিতি বিজ্ঞানৰ ভাষাত দিব পাৰি।

অকণমান বহলাই কোৱা যাওক। ইউক্লিডীয় জ্যামিতিত, যদি আমি এটা ত্ৰিভুজ আকোঁ, যাৰ বাহুবোৰৰ দৈৰ্ঘ্য ৩, ৪ আৰু ৫ ইঞ্চি (inch), তেতিয়া আমি জানো যে এটা কোণৰ মান ৯০°। আৰু যিকোনো ত্ৰিভুজৰ যাৰ বাহুবোৰৰ দৈৰ্ঘ্য ৩, ৪ আৰু ৫ ইঞ্চি, তাৰ এটা কোণ থাকিবই যাৰ মান ৯০° হ'ব। ইয়াৰ কাৰণ হ'ল এই গোটেইবোৰ ত্ৰিভুজ সৰ্বাংগসম (congruent) হয়। ত্ৰিভুজবোৰ কোন স্থানত আছে বা কি দিশত আছে, সেই কথাটো জ্যামিতি অধ্যয়ন কৰা মানুহ (geometer) এজনৰ বাবে গুৰুত্বহীন। কিন্তু একেটা কথাই এজন অৱলোকন কৰা মানুহৰ (surveyor) কাৰণে গুৰুত্বপূৰ্ণ হ'ব পাৰে। গতিকে মোটামুটিভাবে ক'ব পাৰি যে জ্যামিতি অধ্যয়ন কৰা মানুহৰ চোৱাৰ ধৰণ (দৃষ্টিভংগী) অৱলোকন কৰা মানুহৰ চোৱাৰ ধৰণতকৈ উচ্চ (higher)। এজন অৱলোকন কৰা মানুহৰ বাবে তলৰ ত্ৰিভুজকেইটাৰ মাজত কিবা হ'লেও পাৰ্থক্য আছে, কিন্তু জ্যামিতি অধ্যয়ন কৰা মানুহৰ বাবে কোনো পাৰ্থক্য নাই।



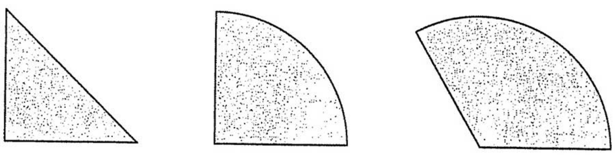
চিত্ৰ - 2

এইবাৰ কিছুমানে চোৱাৰ ধৰণ আৰু কিছু ওপৰলৈ লৈ যাব পাৰে। উদাহৰণস্বৰূপে, কিছুমানৰ দৃষ্টিভংগীত তলৰ ছবিবোৰৰ মাজত কোনো পাৰ্থক্য নাই, তেওঁলোকৰ বাবে গোটেইবোৰ একেধৰণৰ।



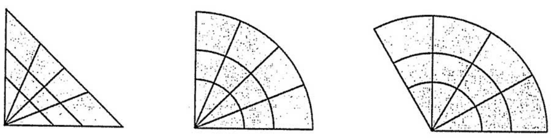
চিত্ৰ - 3

আৰু অলপ ওপৰৰ দৃষ্টিভংগীত,



চিত্ৰ - 4

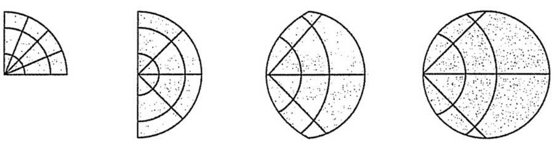
ওপৰৰ ছবিবোৰৰ মাজত কিন্তু চকুত লগাকৈ পাৰ্থক্য দেখা যায়। কিন্তু আমি যদি ছবিবোৰ ৰবৰৰ টুকুৰা এটাত আকোঁ, তেন্তে আমি ৰবৰৰ টুকুৰাটোক অকণমান টানি, হেঁচি বা বেঁকা কৰি এটা ছবিৰ পৰা আনটো ছবি পাব পাৰোঁ। ওপৰৰ ছবিকেইটাক আমাৰ সুবিধাৰ বাবে আমি আন এক ধৰণে তলত আঁকি লওঁ:



চিত্ৰ - 5

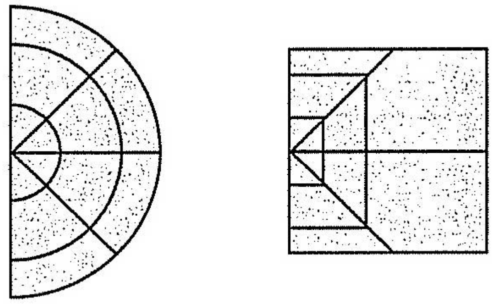
এইযে ওপৰৰ বাক্যকেইশাৰী, সেয়াই হ'ল Topology বা সংস্থিতি বিজ্ঞানৰ মূল বিষয়বস্তু। গণিতত সংস্থিতি বিজ্ঞান হ'ল এনেকুৰা এটা শাখা বা ভাগ য'ত চিত্ৰ 4 ত থকা আকাৰবোৰৰ মাজত কোনো পাৰ্থক্য নাই। অৰ্থাৎ সিহঁতৰ মাজত থকা পাৰ্থক্যখিনি গুৰুত্বহীন, যেনেকৈ জ্যামিতিত চিত্ৰ 2 ত থকা আকাৰবোৰৰ পাৰ্থক্য গুৰুত্বহীন আছিল।

আমি যদি আকৃতি সলোৱা (deformation) প্ৰক্ৰিয়াটো অকণমান আগুৱাই লৈ যাওঁ তেন্তে আমি তলত দিয়া আকৃতিবোৰ পাব পাৰোঁ, য'ত আৰু আমি ত্ৰিভুজৰ উপস্থিতি দেখা নাপাম।



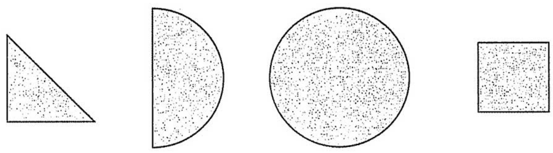
চিত্ৰ - 6

অথবা



চিত্ৰ - 7

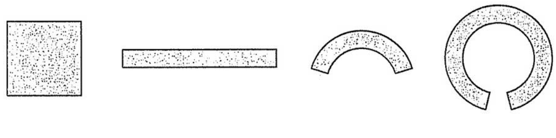
গতিকে সংস্থিতি বিজ্ঞান অধ্যয়ন কৰা এজন মানুহৰ চকুত তলৰ গোটেইবোৰ আকৃতি একে।



চিত্ৰ - 8

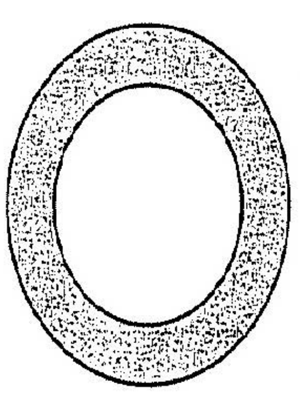
এতিয়া বোধহয় প্ৰথমতে সোধা প্ৰশ্নটোৰ উত্তৰ আমি দিব পৰা হ'লোঁ।

যেনেকৈ আমি কওঁ যে চিত্ৰ 2 ত থকা ত্ৰিভুজকেইটা জ্যামিতিকভাবে সমতুল্য (geometrically equivalent) বা সৰ্বাংগসম, ঠিক তেনেকৈ চিত্ৰ 8 ত থকা আকৃতিকেইটা সংস্থিতি বিজ্ঞানত সাংস্থিতিকভাবে সমতুল্য (topologically equivalent)। আকৌ যেনেকৈ ৰবৰৰ টুকুৰা এটাক টানি বা হেঁচি বা বেঁকা কৰি আমি বিভিন্ন আকৃতিলৈ পৰিবৰ্তন কৰিব পাৰোঁ, ঠিক তেনেকৈ সংস্থিতি বিজ্ঞানত যিকোনো এটা আকৃতিক টানি বা হেঁচি বা বেঁকা কৰি আমি আন এটা সমতুল্য আকৃতি পাব পাৰোঁ। উদাহৰণস্বৰূপে, আমি বৰ্গ এটাৰ পৰা আকৃতি সলনি কৰি তলৰ আকৃতিবোৰ (সমতুল্য) পাব পাৰোঁ।



চিত্ৰ - 9

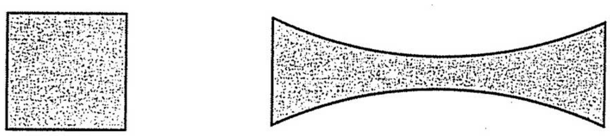
কিন্তু আমি যিমানেই নাটানো বা বেঁকা নকৰোঁ কিয়, আমি কেতিয়াও তলত দিয়া ধৰণৰ বন্ধ বলয় (closed ring) এটা পাব নোৱাৰোঁ।



চিত্ৰ - 10

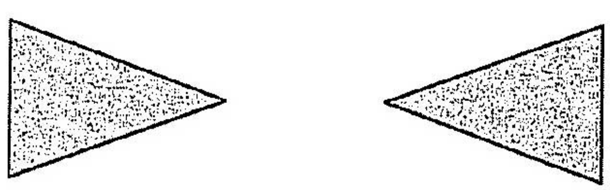
সেইটো পাবলৈ হ'লে আমি চিত্ৰ 9 ৰ শেষৰ ছবিখনত কিবা এটা বেলেগ, যেনেদৰে মূৰ দুটা আঠা লগাই দিয়াৰ নিচিনা কাম কৰিব লাগিব। গতিকে সংস্থিতি বিজ্ঞানত এটা বৰ্গ আৰু এটা বন্ধ বলয় সাংস্থিতিকভাবে সমতুল্য নহয়। সিহঁত সংস্থিতি বিজ্ঞানৰ চকুত ভিন্ন, যেনেদৰে জ্যামিতিত এটা বৰ্গ আৰু এটা ত্ৰিভুজ ভিন্ন।

একেদৰে বৰ্গ এটাক টানি তলত দিয়া ধৰণৰ কৰিব পাৰি।



চিত্ৰ - 11

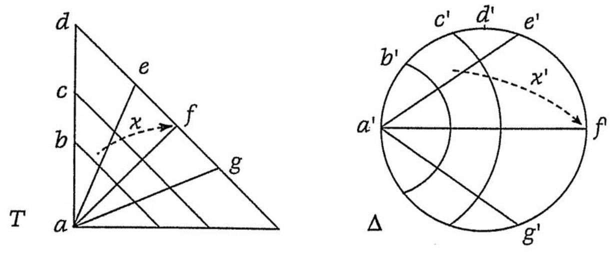
কিন্তু তলত দিয়া ধৰণৰ দুটা ত্ৰিভুজ পাবলৈ হ'লে, আমি ৰবৰ টুকুৰাক চিঙি দুটুকুৰা কৰিব লাগিব।



চিত্ৰ - 12

গতিকে এই ত্ৰিভুজ দুটা একেলগে এটা বৰ্গৰ সমতুল্য (topologically equivalent) হ'ব নোৱাৰে।

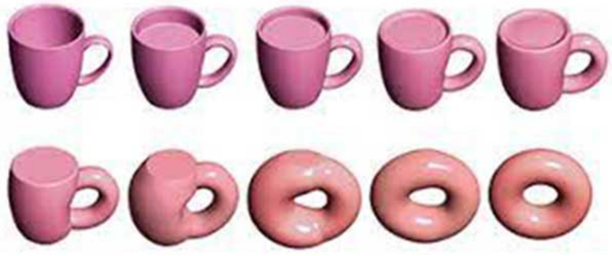
এতিয়া প্ৰশ্ন হ'ল, এই গোটেই কথাখিনিৰ লগত অংকৰ সম্পৰ্ক ক'ত? ৰবৰৰ টুকুৰা এটা টনা বা বেঁকা কৰাটো এটা গাণিতিক প্ৰক্ৰিয়া (mathematical operation) কোনোমতেই নহয়। কিন্তু চিত্ৰ 5, চিত্ৰ 6 আৰু চিত্ৰ 7 ৰ ছবিবোৰে আমাক সাংস্থিতিক সমতুল্যতাৰ সংজ্ঞা গাণিতিকভাবে দিয়াত সহায় কৰে, বা সংজ্ঞা গাণিতিকভাবে কেনেকৈনো দিব লাগে তাৰ এটা মৃদু আভাস দিয়ে। আমি এতিয়া চিত্ৰ 5 ৰ প্ৰথমটো আৰু চিত্ৰ 6 ৰ একেবাৰে শেষৰ ছবি দুটাৰ ওপৰত আলোকপাত কৰোঁ।



চিত্ৰ - 13

ত্ৰিভুজ T ৰ আকৃতি সলনি কৰি কাঁহী (disc) Δ পাওঁতে আচলতে আমি T ৰ বিন্দু $a, b, c, \ldots$ আৰু Δ ৰ বিন্দু $a', b', c', \ldots$ সমূহৰ মাজত ক্ৰমে এটা একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলন (Bijection) $\phi : T \to \Delta$ পাওঁ। যিহেতু আমাৰ আকৃতি সলনি কৰাৰ নিয়মত ছিঙি দিয়া (tearing) বা যোৰা লগোৱা (gluing) নিষেধ, গতিকে যদিহে T ৰ এটা বিন্দু x আন এটা বিন্দু f ৰ ফালে অগ্ৰসৰ হয়, তেন্তে Δ ত x ৰ প্ৰতিবিম্ব (image/corresponding point) x' বিন্দুটো f ৰ প্ৰতিবিম্ব f' ৰ ফালে অগ্ৰসৰ হয়। তেনেকৈ ওলোটাটোও হয়, মানে Δ ত যদি কোনোবা এটা বিন্দু আনটোৰ ফালে অগ্ৰসৰ হয় তেন্তে T ত সিহঁতৰ আদি প্ৰতিবিম্ববোৰ (inverse image) প্ৰথমটো, দ্বিতীয়টোৰ ফালে অগ্ৰসৰ হ'ব। গাণিতিক ভাষাত $\phi : T \to \Delta$ আৰু $\phi^{-1} : \Delta \to T$ দুয়োটাই অবিচ্ছিন্ন (continuous)। যিহেতু সংস্থিতি বিজ্ঞানত ঠিক ৰবৰ এটুকুৰাৰ নিচিনা নিছিঙা আৰু যোৰা নলগোৱাকৈ আকৃতি পৰিবৰ্তন কৰিব পাৰি, সেইবাবে এই বিষয়টোক বহুতে 'rubber sheet geometry' বুলিও কয়।

সংস্থিতি বিজ্ঞান অধ্যয়ন কৰা মানুহবোৰৰ মাজত এটা কথা বৰকৈ প্ৰচলিত যে, এওঁলোকে কফি কাপ (coffee cup) আৰু ড'নাটৰ (doughnut) মাজত কোনো পাৰ্থক্য দেখা নাপায়, কাৰণ তলত দেখুওৱা ধৰণে সংস্থিতি বিজ্ঞানত এটা কফি কাপৰ পৰা ড'নাট পাব পাৰি।



চিত্ৰ - 14

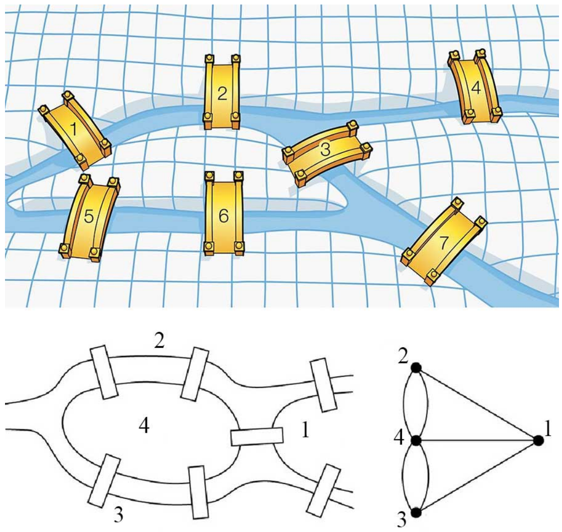
সংস্থিতি বিজ্ঞানৰ আৰু এটা সাধাৰণ প্ৰশ্ন হ'ল, ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ কোনবোৰ বৰ্ণ এটা আনটোৰ সাংস্থিতিকভাবে সমতুল্য? দেখা যায় যে আমি ইংৰাজী বৰ্ণমালাক সমতুল্যতাৰ আধাৰত তলত দিয়া ধৰণে ভাগ কৰিব পাৰোঁ।

$$\{A,R\},\{B\},\{C,G,I,J,L,M,N,S,U,V,W,Z\},$$
$$\{D,O\},\{E,F,T,Y\},\{H,K\},\{P,Q\},\{X\}.$$

সংস্থিতি বিজ্ঞানৰ আৰম্ভণিনো কেনেকৈ হৈছিল? আৰম্ভণিৰ পৰা এতিয়ালৈকে বহুতো বিখ্যাত গণিতজ্ঞ এই বিষয়টোৰ বিৱৰ্তনৰ লগত জড়িত। প্ৰথমে 'Topology' শব্দটো ব্যৱহাৰ কৰাৰ বাবে জাৰ্মান গণিতজ্ঞ য়হান বেনেডিক্ট লিষ্টিঙক (Johann Benedict Listing, ২৫ জুলাই, ১৮০৮ চন – ২৪ ডিচেম্বৰ, ১৮৮২ চন) কৃতিত্ব দিব লাগিব। যদিওবা তেওঁৰ অৱদান খুব বেছি নাছিল, তথাপি তেওঁৰ ১৮৪৭ চনৰ গৱেষণা-পত্ৰ 'Vorstudien zur Topologie'ৰ বাবে তেওঁক সদায়েই স্মৰণ কৰা হয়, য'ত তেওঁ প্ৰথমবাৰ 'Topologie' (ইংৰাজীত 'Topology') শব্দটো জড়িত কৰিছিল।

আজিৰ যুগৰ গণিতজ্ঞসকলে ফৰাচী গণিতজ্ঞ অঁৰি পইনকাৰেৰ (Henri Poincaré, ২৯ এপ্ৰিল, ১৮৫৪ চন – ১৭ জুলাই, ১৯১২ চন) ১৮৯৫ চনত প্ৰকাশিত হোৱা বিখ্যাত গৱেষণা-পত্ৰ 'Analysis Situs' খনৰ পাছৰে পৰা সংস্থিতি বিজ্ঞানক গণিতৰ এটা পৃথক শাখা হিচাপে গণ্য কৰিব খোজে। যদিওবা বিষয়টোৰ কিছুমান বিষয়বস্তুৰ ধাৰণা কিন্তু বহুতো গণিতজ্ঞই বহু আগৰে পৰা অধ্যয়ন বা ব্যৱহাৰ কৰি আহিছিল।

ইয়াৰ আৰম্ভণি হিচাপে ওঠৰ শতিকাৰ বিখ্যাত 'কনিগ্‌ছবাৰ্গ ব্ৰীজ প্ৰবলেম'কে (Königsberg Bridge Problem) ধৰিব পাৰি। যাৰ পৰা গণিতৰ আন এটা শাখা 'লেখ তত্ত্ব'ৰ (Graph Theory) উৎপত্তি হৈছিল। কনিগ্‌ছবাৰ্গ (এতিয়া কলিনিনগ্ৰেড, Kaliningrad, ৰাছিয়া) হৈছে পুৰণি প্ৰুছিয়ান চহৰ, যি প্ৰাগেল (Praegel) এতিয়াৰ প্ৰেগ'ল্যা (Pregolya) নামৰ নদীখনৰ পাৰত অৱস্থিত।



চিত্ৰ - 15

ছবিত দেখুওৱা ধৰণে চহৰখনত সাতখন দলং ব্যৱহাৰ কৰিছিল নদীখন পাৰ হ'বলৈ। প্ৰশ্নটো আছিল কোনোবাই সাতোখন দলং মাত্ৰ এবাৰকৈ ব্যৱহাৰ কৰি চহৰখন পাৰ হৈ যাব পাৰিব নে নোৱাৰে। ছুইজাৰলেণ্ডৰ গণিতজ্ঞ লিওনাৰ্ড অইলাৰে (Leonhard Euler, ১৫ এপ্ৰিল, ১৭০৭ চন – ১৮ ছেপ্তেম্বৰ, ১৭৮৩ চন) প্ৰথমে সমাধান আগবঢ়াইছিল যে এইটো সম্ভৱ নহয়। ১৭৩৬ চনত তেওঁৰ সমাধানটো প্ৰকাশ কৰিছিল ৰাছিয়াৰ ছেইণ্ট পিটাৰ্ছবাৰ্গৰ বিখ্যাত একাডেমী অৱ ছায়েন্সৰ (Academy of Science) জাৰ্নেলত যাৰ শিৰোনাম আছিল 'Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis' (The solution of a problem related to the geometry of Position)। গৱেষণা-পত্ৰখনৰ শিৰোনামটোৰ পৰা অনুমান কৰিব পাৰি যে অইলাৰে জানিছিল যে তেওঁ এনেকুৱা এবিধ জ্যামিতি কৰি আছে য'ত দূৰত্বৰ (distance) ধাৰণা অমূলক। তেওঁৰ সমাধানটোৰ সাৰাংশটো আছিল–

"A graph has a path traversing each edge (দলং) exactly once if exactly two vertices (নদীৰ পাৰ কেইটা) are connected to odd number of edges."

মন কৰিবলগীয়া যে এই ঘটনাটোৰ আগলৈকে গণিতৰ মোটামুটি সকলো ধাৰণা জোখ-মাপৰ (Measurement) লগত জড়িত। এইটোৱেই প্ৰথম পৰিঘটনা য'ত জোখ-মাপৰ ধাৰণা সম্পূৰ্ণ অব্যৱহৃত আছিল। এনেকুৱা ধৰণৰ দ্বিতীয়টো ঘটনাও অইলাৰৰ লগতে জড়িত আছিল। ১৭৫০ চনত অইলাৰে এখন চিঠি লিখিছিল আন এজন বিখ্যাত গণিতজ্ঞ খ্ৰিষ্টিয়ান গল্ডবাকলৈ (Christian Goldbach, ১৮ মাৰ্চ, ১৬৯০ চন – ২০ নৱেম্বৰ,

১৭৬৪ চন)। উল্লেখযোগ্য যে সেই সময়ত গল্ডবাকৰ এটা বিখ্যাত অনুমান (conjecture) “Any even number greater than 2 can be written as a sum of two primes” বা “২-তকৈ ডাঙৰ যিকোনো যুগ্ম সংখ্যাক দুটা মৌলিক সংখ্যাৰ যোগফল হিচাপে লিখিব পাৰি”ক লৈ বৰকৈ হৈ চৈ চলি আছিল। অৱশ্যে গল্ডবাকৰ অনুমান (Goldbach’s conjecture) আজিৰ তাৰিখলৈকে সমাধান নোহোৱাকৈয়ে আছে। যি কি নহওক, অইলাৰে চিঠিখনত গল্ডবাকৰ অনুমানৰ বিষয়ে কিছু কথা লিখাৰ লগতে, তেওঁৰ বিখ্যাত বহুফলকৰ (polyhedron) সূত্ৰটো ‘$V - E + F = 2$’ ও লিখি পঠিয়াইছিল। ইয়াত V মানে বহুফলকটোৰ শীৰ্ষবিন্দুৰ (vertices) সংখ্যা, E মানে কাষ বা দাঁতিৰ (edge) সংখ্যা আৰু F মানে ফলকৰ (face) সংখ্যা বুজাইছে। অৱশ্যে সূত্ৰটো প্ৰকাশ পাইছিল ১৭৫২ চনত।

এইখিনিতে উল্লেখ কৰিব পাৰি যে মহান গণিতজ্ঞ আৰ্কিমিডিছ (Archimedes, খ্ৰীষ্টপূৰ্ব ২৮৭-২১২) আৰু ৰেনে ডেকাৰ্ট (René Descartes, ৩১ মাৰ্চ, ১৫৯৬ চন – ১১ ফেব্ৰুৱাৰী, ১৬৫০ চন) দুয়োজনে বহুফলকৰ সৈতে জড়িত বহুতো কাম কৰিছিল আৰু সেইবোৰ প্ৰকাশো কৰিছিল। কিন্তু উপৰোক্ত সূত্ৰটো তেওঁলোকে অনুধাৱন কৰিব নোৱাৰাৰ মূল কাৰণটো হৈছে যে তেতিয়াৰ দিনত জোখ-মাপৰ ধাৰণা নোহোৱাকৈ জ্যামিতিৰ কথা ভবাটো অকল্পনীয় আছিল।

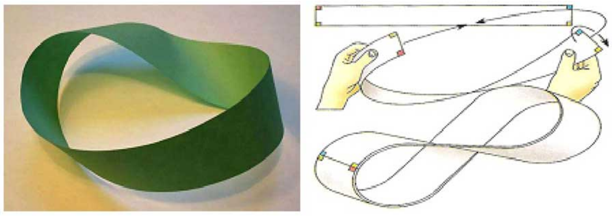
১৭৫২ চনত অইলাৰে দুখন গৱেষণা-পত্ৰ প্ৰকাশ কৰিছিল। ইয়াৰে প্ৰথমখনত তেওঁ সূত্ৰটো অকল প্ৰস্তাৱ কৰিছিল, কিন্তু স্বীকাৰ কৰিছিল যে সূত্ৰটো তেওঁ প্ৰমাণ কৰিব পৰা নাই। দ্বিতীয়খনত তেওঁ প্ৰমাণটো দিছিল, কিন্তু কিছুমান কথা তেওঁৰ দৃষ্টিগোচৰ হোৱা নাছিল। উদাহৰণস্বৰূপে তেওঁ ধৰি লৈছিল তেওঁৰ গোটা বস্তুবোৰ (solids) আছিল উত্তল (convex)। উল্লেখ কৰা ভাল যে এটা আকৃতিক উত্তল বুলি কোৱা হয় যদিহে আকৃতিটোত থকা যিকোনো দুটা বিন্দু সংযোগী ৰেখাডাল সম্পূৰ্ণৰূপে আকৃতিটোৰ ওপৰতে থাকে।

অইলাৰৰ পথ অনুসৰণ কৰি আন এজন স্বল্পখ্যাত গণিতজ্ঞ এণ্টন জিন লুইলিয়াৰে (Antonie Jean L’Huilier, ২৪ এপ্ৰিল, ১৭৫০ চন – ২৮ মাৰ্চ, ১৮৪০ চন) ১৮১৩ চনত প্ৰমাণ কৰিছিল যে অইলাৰৰ সূত্ৰটো ফুটা (hole) থকা আকৃতিবোৰৰ (solids) বাবে শুদ্ধ নাছিল। তেওঁ দেখুৱাইছিল যে যদি আকৃতি (solid) এটাৰ g টা ফুটা (hole) থাকে তেন্তে

$$V - E + F = 2 - 2g.$$

এইটোৱেই আছিল সাংস্থিতিক নিশ্চৰ (Topological invariant)-ৰ বিষয়ে জনাজাত প্ৰথম সূত্ৰ।

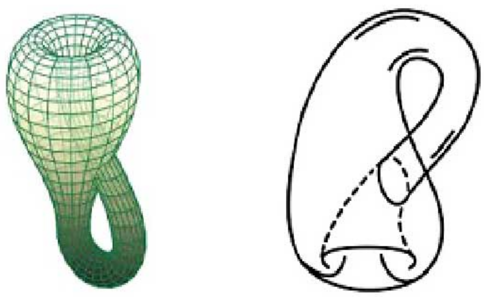
আমি দেখা বেছিভাগ প্ৰাকৃতিক বস্তুৰে দুটা বা ততোধিক ফাল (side) থাকে। জাৰ্মান গণিতজ্ঞ অগষ্ট মবিয়াছে (August Möbius, ১৭ নৱেম্বৰ, ১৭৯০ চন – ২৬ ছেপ্তেম্বৰ, ১৮৬৮ চন) ১৮৫৮ চনত এটা ফাল থকা পৃষ্ঠৰ (surface) বিষয়ে প্ৰকাশ কৰিছিল। যাক আজিকালি ‘মবিয়াছ পটি’ (Möbius strip) বুলি জনা যায়, আৰু ইয়াক তলত দেখুওৱা ধৰণে দীঘল আয়তাকাৰ কাগজৰ পটি এটা আধা ঘুৰাই (half twist) মূৰ দুটা যোৰা লগাই সাজিব পাৰি। এই পটিটোৰ যিকোনো এটা বিন্দুৰ পৰা গৈ থাকিলে আমি ইফাল-সিফাল নোহোৱাকৈ আকৌ সেই বিন্দুটোলৈ ঘূৰি আহিম।



চিত্ৰ - 16

উল্লেখযোগ্য যে এটুকুৰা কাগজৰ (আয়তাকাৰ) পটিৰ দুটা ফাল (two sides) আৰু এটা দাঁতি বা কাষ (edge) থাকে। কিন্তু মবিয়াছ পটিৰ মাত্ৰ এটাহে ফাল আৰু এটা দাঁতি থাকে।

আন এজন জাৰ্মান গণিতজ্ঞ ফিলিক্স ক্লাইনেও (Felix Klein, ২৫ এপ্ৰিল, ১৮৪৯ চন – ২২ জুন, ১৯২৫ চন) ১৮৮২ চনত এটা বন্ধ (closed) একফলীয়া (one sided) পৃষ্ঠৰ (surface) উদাহৰণ দিছিল, যাক ক্লাইন বটল (Klein Bottle) বুলি জনা যায়।



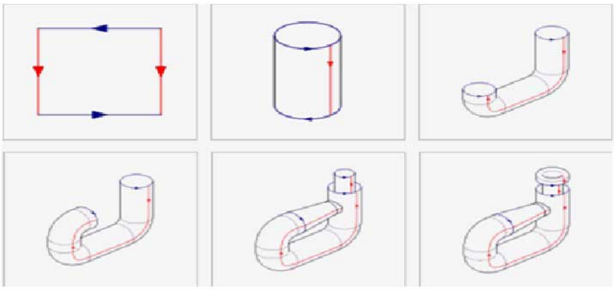
চিত্ৰ - 17

মন কৰিবলগীয়া যে ক্লাইন বটল ত্ৰিবিমিতীয় মহাকাশত (Three dimensional space) নিজকে ছেদ (intersect)

নকৰাকৈ স্থিত (exist) নহয়। যিহেতু তেতিয়াৰ দিনত বেছিভাগ গণিতজ্ঞই অকল ত্ৰিবিমিতীয় মহাকাশৰ পৃষ্ঠ লৈয়ে চিন্তা-চৰ্চা কৰিছিল, গতিকে স্বাভাৱিকতেই ক্লাইন বটলে সেইসময়ত গণিতজ্ঞসকলৰ মাজত যথেষ্ট উৎসুকতাৰ সৃষ্টি কৰিছিল।

"Informally, it is a one sided surface which, if travelled upon, could be followed back to the point of origin while flipping the traveller upside down."

তলত দিয়া ধৰণে থূলমূলকৈ ক্লাইন বটল এটা আমি নিজেও সাজিব পাৰোঁ।



চিত্ৰ - 18

আমি প্ৰথমতে বৰ্গাকাৰ পটি এটাৰ ৰঙা চিন থকা দাঁতি দুটা আঠাৰে যোৰা লগাই দি এটা চুঙা (cylinder) সাজি লওঁ। তাৰ পাছত চুঙাটোৰ এটা মূৰ লৈ গৈ আনটো মূৰৰ তলৰ ফালেৰে ফুটা কৰি, ফুটাটোৰে মূৰটো সুমুৱাই আনটো মূৰেৰে উলিয়াই ছবিত দেখুওৱা ধৰণে অকণমান ফালবিলাক ভাঁজ কৰি তললৈ বহাই দিব লাগিব।

উপৰোক্ত চাৰিটা লেখত ল'বলগীয়া সংস্থিতি বিজ্ঞান সম্পৰ্কীয় চিন্তা-চৰ্চাৰ লগতে আৰু বহুতো গণিতজ্ঞই অঁৰি পইনকাৰেৰ ১৮৯৫ চনত প্ৰকাশিত গৱেষণা-পত্ৰ 'Analysis situs'ৰ আগৰে পৰা এই সম্পৰ্কীয় কিছু কিছু অৱদান আগবঢ়াই আহিছিল। জাৰ্মানীত জন্ম হোৱা মাৰ্কিন গণিতজ্ঞ মেক্স ডেন (Max Dehn, ১৩ নৱেম্বৰ, ১৮৭৮ চন – ২৭ জুন, ১৯৫২ চন) আৰু ডেনমাৰ্কৰ গণিতজ্ঞ প'ল হিগ'ই (Poul Heegaard, ২ নৱেম্বৰ, ১৮৭১ চন – ৭ ফেব্ৰুৱাৰী, ১৯৪৮ চন) যুটীয়াভাবে ১৯০৭ চনত দ্বিবিমিতীয় পৃষ্ঠৰ বৰ্গীকৰণ উপপাদ্য (Classification theorem for two dimensional surface) প্ৰথমবাৰৰ বাবে আগবঢ়ায়। ইয়াৰ ঠিক পাছতেই সংস্থিতি বিজ্ঞানৰ লগত বীজগণিতৰ (Algebra) সংযোগ ঘটাই বিভিন্ন গৱেষণা আৰম্ভ হ'ল। ইয়াৰ এটা অন্যতম উদাহৰণ হ'ল ওলন্দাজ (Dutch) গণিতজ্ঞ ব্ৰাৱাৰ (L. E. J. Brouwer, ২৭ ফেব্ৰুৱাৰী, ১৮৮১ চন – ২ ডিচেম্বৰ, ১৯৬৬ চন) আৰু তেওঁৰ বিখ্যাত ফিক্সড-পইণ্ট উপপাদ্য (fixed-point theorem)!

যদিও 'বীজগণিতীয় সংস্থিতি বিজ্ঞান' (Algebraic Topology) নামটো প্ৰথমে ৰাছিয়াত জন্ম হোৱা মাৰ্কিন গণিতজ্ঞ চ'ল'মন লেফচেজে (Solomon Lefschetz, ৩ ছেপ্তেম্বৰ, ১৮৮৪ চন – ৫ অক্টোবৰ, ১৯৭২ চন) ১৯৩৬ চনৰ শেষৰ ফালে প্ৰথম ব্যৱহাৰ কৰিছিল। কিন্তু, এই ধাৰণাৰ সম্পৰ্কত বিংশ শতিকাৰ আৰম্ভণিৰ ফালৰ পৰাই চিন্তা-চৰ্চা চলি আছিল।

সংস্থিতি বিজ্ঞানৰ প্ৰাৰম্ভিক অগ্ৰগতিৰ সমান্তৰালভাবে ঊনৈশ শতিকাৰ বিশ্লেষণ(Analysis)-ৰ লগত জড়িত গণিতজ্ঞ, উদাহৰণস্বৰূপে ফৰাচী গণিতজ্ঞ অগষ্টিন ক'চি (Augustin Cauchy, ২১ আগষ্ট, ১৭৮৯ চন – ২৩ মে' ১৮৫৭ চন) আৰু জাৰ্মান গণিতজ্ঞ কাৰ্ল ওৱেৰষ্ট্ৰাছে (Karl Weierstrass, ৩১ অক্টোবৰ, ১৮১৫ চন – ১৯ ফেব্ৰুৱাৰী, ১৮৯৭ চন) ফুৰিয়েৰ শ্ৰেণীৰ (Fourier series) বিষয়ে গৱেষণা কৰিছিল, য'ত এটা ফলনৰ অনুক্ৰম (sequence of functions) আন এটা ফলনলৈ অভিসাৰিত (converge) হৈছিল।

আনফালে জাৰ্মানীৰ জৰ্জ কেণ্টৰ (George Cantor, ৩ মাৰ্চ, ১৮৪৫ চন – ৬ জানুৱাৰী, ১৯১৮ চন) আৰু ফ্ৰান্সৰ এমিয়েল বৰেলৰ (Émile Borel, ৭ জানুৱাৰী, ১৮৭১ চন – ৩ ফেব্ৰুৱাৰী, ১৯৫৬ চন) দৰে গণিতজ্ঞসকলে ফুৰিয়েৰ শ্ৰেণী আৰু সংহতি তত্ত্বৰ (Set theory) মাজৰ সম্পৰ্কৰ বিষয়ে গভীৰভাবে গৱেষণা কৰিছিল।

ইয়াৰ পৰাই অনুক্ৰমৰ অভিসাৰিতাৰ (convergence of sequence) বিষয়ে এটা সাধাৰণ ধাৰণা গাণিতিকভাবে দিয়াত সহায় হৈছিল। ১৮৯৯ চনত জাৰ্মান গণিতজ্ঞ ডেভিড হিলবাৰ্টে (David Hilbert, ২৩ জানুৱাৰী, ১৮৬২ চন – ১৪ ফেব্ৰুৱাৰী, ১৯৪৩ চন) সাধাৰণ জ্যামিতিৰ (General Geometry) ধাৰণা স্বীকাৰ্যৰ সহায়ত (Axiomatic setting) দিয়াৰ বাবে প্ৰস্তাৱ দিছিল, যিটো আগত অকল ইউক্লিডীয় জ্যামিতিতহে আছিল। ১৯০৫ চনত ফৰাচী গণিতজ্ঞ মৰিচ্ ফ্ৰেচেটে (Maurice Fréchet, ২ ছেপ্তেম্বৰ, ১৮৭৮ চন – ৪ জুন, ১৯৭৩ চন) দূৰত্বৰ ধাৰণাক সাধাৰণীকৃত (Generalize) কৰিছিল। যিকোনো এটা সংহতিক তেওঁ সাধাৰণীকৃত কৰা দূৰত্বৰ ধাৰণাৰ লগত একেলগে মেট্ৰিক স্পেচ (Metric space) নাম দিছিল আৰু ইয়াৰ যিকোনো সংহতিত অনুক্ৰমৰ অভিসাৰিতাৰ বৰ্ণনা দিছিল।

উপৰোক্ত গৱেষণাবোৰো আচলতে সংস্থিতি বিজ্ঞানৰ ব্যাখ্যা বা সংজ্ঞা দিবলৈ বিভিন্নজনৰ ভিন্ন প্ৰচেষ্টাহে আছিল। ১৯০৮ চনত ৰোমত অনুষ্ঠিত হোৱা 'গণিতজ্ঞসকলৰ আন্তঃৰাষ্ট্ৰীয় সন্মিলন'ত (International congress of Mathematicians, ICM) হাংগেৰিৰ গণিতজ্ঞ ফ্ৰিজিছ্ ৰিজ্-এ (Frigyes Riesz, ২২ জানুৱাৰী, ১৮৮০ চন – ২৮ ফেব্ৰুৱাৰী, ১৯৬৬ চন) এখন গৱেষণা-পত্ৰ পাঠ কৰিছিল। তাতেই তেওঁ কোনো দূৰত্বৰ ধাৰণা নোহোৱাকৈ অকল সংহতি তত্ত্বৰ সহায়ত প্ৰথমবাৰৰ বাবে সংস্থিতি বিজ্ঞানৰ বৰ্ণনা দিছিল। তাৰ ঠিক কিছুবছৰ পাছতেই ১৯১৪ চনত জাৰ্মান গণিতজ্ঞ ফিলিক্স হাউছডৰ্ফে (Felix Housdorff, ৮ নৱেম্বৰ, ১৮৬৮ চন – ২৬ জানুৱাৰী, ১৯৪২ চন) তেওঁৰ গৱেষণা-পত্ৰ 'Grundzüge der Mengenlehre'ত (Elements of set theory) দূৰত্বৰ ধাৰণা নোহোৱাকৈ প্ৰথমবাৰৰ বাবে সামীপ্য বা প্ৰতিবেশৰ (neighbourhood) ধাৰণা চাৰিটা স্বীকাৰ্যৰ সহায়ত ব্যাখ্যা কৰে। হাউছডৰ্ফে দূৰত্ব (distance or metric), প্ৰতিবেশ (neighbourhood) আৰু সীমাবিন্দু (limit point) মাজৰ অভিগৃহীত (Axiomatic) সম্পৰ্ক স্থাপন কৰিছিল। এইখিনিতে উল্লেখ কৰা ভাল যে সীমাবিন্দুৰ (limit point) ধাৰণা অকল সংহতি তত্ত্বৰ সহায়ত প্ৰথমবাৰ ৰিজ্-এ ওপৰত উল্লেখ কৰা গৱেষণা-পত্ৰতেই দিছিল।

ৰিজ্ আৰু হাউছডৰ্ফৰ এই গৱেষণাখিনি সংস্থিতি বিজ্ঞানৰ এটা মাইলৰ খুটি হিচাপে পৰিগণিত হয়, কাৰণ ইয়াৰ সহায়তেই বিমূৰ্ত সংস্থিতি বিজ্ঞানৰ (Abstract Topological space) সংজ্ঞা দিয়া হৈছিল। ১৯১০ চনত আকৌ হিলবাৰ্টে বিমূৰ্ত সংহতিত (Abstract set) এটা বিন্দুৰ প্ৰতিবেশৰ (neighbourhood) বাবে কিছুমান স্বতঃসিদ্ধ বা অভিগৃহীত (Axiom) দিছিল।

এই গোটেইবোৰ সামৰি ১৯২৫ চনত ৰাছিয়াৰ গণিতজ্ঞ পাভেল আলেকজেন্দ্ৰভে (Pavel Alexandrov, ৭ মে', ১৮৯৬ চন – ১৬ নৱেম্বৰ, ১৯৮২ চন) প্ৰথমবাৰ আজিৰ যুগৰ বিমূৰ্ত সংহতিত সংস্থিতি বিজ্ঞানৰ যি সংজ্ঞা তাৰ স্বতঃসিদ্ধ আগবঢ়াইছিল।

এনেকৈয়ে সংস্থিতি বিজ্ঞানৰ বিৱৰ্তন ঘটি এতিয়া গণিতৰ এটা অন্যতম আৰু এৰাব নোৱাৰা অংগ হৈ পৰিল। ১৯৬০ ৰ দশকত সংস্থিতি বিজ্ঞানে যথেষ্ট অগ্ৰগতি লাভ কৰে আৰু বহুতো অমীমাংসিত প্ৰশ্নৰ উত্তৰৰ লগতে মাত্ৰাৰ (Dimension) ধাৰণা বিমূৰ্ত সংস্থিতি বিজ্ঞানত পোৱা যায়। তাৰ লগে লগে নিসন্ধি (compactness)-ৰ ধাৰণাও বেলেগ ধৰণে দিয়াই তাৰ লগত জড়িত বহু প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া হয়। এই ধাৰণাই আচলতে n-বিমীয় (মাত্ৰাৰ) ইউক্লিডীয় স্থানৰ (n-dimensional Euclidean space) বন্ধ (closed) আৰু পৰিবদ্ধ (bounded) উপ-সংহতিৰ ধাৰণাক সাধাৰণীকৃত (generalize) কৰে। এই দশকৰ পৰাই সংস্থিতি বিজ্ঞানৰ নতুন নতুন শাখা, যেনে বীজগণিতীয় সংস্থিতি বিজ্ঞান (Algebraic Topology), অসীম বিমীয় সংস্থিতি বিজ্ঞান (Infinite dimensional Topology), অৱকল সংস্থিতি বিজ্ঞান (Differential Topology), জ্যামিতিক সংস্থিতি বিজ্ঞান (Geometric Topology), ক্ষুদ্ৰ বিমীয় সংস্থিতি বিজ্ঞান (Low dimensional Topology) আদিৰ প্ৰসাৰণ ঘটিবলৈ আৰম্ভ কৰিছিল।

উল্লেখযোগ্য যে ১৯০৪ চনত পইনকাৰে-এ এটা প্ৰশ্ন কৰিছিল, যিটোক 'পইনকাৰে অনুমান' (Poincaré Conjecture) হিচাপে জনা গৈছিল। এইটো অকল সংস্থিতি বিজ্ঞানেই নহয়, সমগ্ৰ গণিত বিষয়ৰে এটা অন্যতম কঠিন প্ৰশ্ন ৰূপে পৰিগণিত হৈছিল, যাৰ বাবে ক্লে গণিত প্ৰতিষ্ঠানে (Clay Mathematics Institute) ২০০০ চনত ইয়াক সাতটা 'মিলেনিয়াম প্ৰাইজ প্ৰব্লেমছ'ৰ (Millennium Prize Problems) মাজৰ এটা হিচাপে ঘোষণা কৰি, সমাধান কৰোতালৈ দহ লাখ মাৰ্কিন ডলাৰ পুৰস্কাৰ ঘোষণা কৰিছিল। ২০০৬ চনত ৰাছিয়াৰ গণিতজ্ঞ গ্ৰিগ্ৰৰী পিৰেলমেনে (Grigori Perelman) ইয়াৰ উত্তৰ দিবলৈ সক্ষম হৈছিল। যাৰ বাবে তেওঁৰ নাম ২০০৬ চনত ফিল্ডছ মেডেলৰ বাবে মনোনীত কৰা হৈছিল আৰু লগতে ২০১০ চনত দহ লাখ মাৰ্কিন ডলাৰৰ অৰ্থ পুৰস্কাৰটোৰ বিজয়ী ঘোষণা কৰা হৈছিল। কিন্তু দুয়োটা বঁটাই গ্ৰহণ কৰাৰ পৰা তেওঁ বিৰত থাকিল।

সংস্থিতি বিজ্ঞানৰ ব্যৱহাৰ আজিকালি গণিতৰ বাহিৰেও বিভিন্ন বিষয়ত বহুলভাৱে হ'বলৈ লৈছে। যেনে, কম্পিউটাৰ বিজ্ঞান (Computer Science), পদাৰ্থ বিজ্ঞান (Physics), ৰবটিক্স (Robotics), ইত্যাদি। উল্লেখযোগ্য যে ২০১৬ চনৰ পদাৰ্থবিজ্ঞানৰ নোবেল বঁটা বিজয়ী তিনিওজনৰ গৱেষণাৰ বিষয়-বস্তুত সংস্থিতি বিজ্ঞানৰ ব্যৱহাৰ দেখা যায়।

[প্ৰবন্ধটোৰ আদিভাগ Topological Spaces: From Distance to Neighborhood by Gerard Buskes and Arnoud Van Rooij গ্ৰন্থখনৰ (Springer, 1997) আলমত লিখা হৈছে। অন্যান্য তথ্যসূত্ৰ: ৱিকিপিডিয়া আৰু এনচাইক্ল'পিডিয়া ব্ৰিটানিকা।]