মহাবিদ্যালয় পৰ্যায়ৰ গণিত-শিক্ষণৰ সন্দৰ্ভত

ড° খনীন চন্দ্ৰ চৌধুৰী

এমেৰিতাছ প্ৰফেছৰ, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়

(গণিতৰ বিশেষ শাখাৰ মন কৰিবলগীয়া কেইটামান বৈশিষ্ট্যসূচক বিষয়ৰ উত্থাপনেৰে!)

আৰম্ভণিতেই কৈ থোৱা হওক– 'শিক্ষকতা এক কলা।' ইয়াত শিক্ষকৰ বিষয়-জ্ঞানৰ উপৰি বিষয়-বস্তু উপস্থাপন পদ্ধতি, তেওঁৰ শৰীৰ-ভাষা, স্পষ্ট উচ্চাৰণেৰে প্ৰাসংগিক পাঠৰ প্ৰয়োজনীয় কোনো শব্দ বা শাৰী এটাৰ প্ৰতি মনযোগ আকৰ্ষণ কৰিবলৈ বুলি 'জোৰ দিয়াটো', ইত্যাদিৰে সামগ্ৰিকভাবে শিক্ষকতা বোলা ভাৰনাই এক শৰীৰ লয়। এনে অগ্ৰসৰতাই শ্ৰোতাৰ মনত এক অনুঘটকীয় অনুভৱেৰে এক সজাগতাৰ সৃষ্টি কৰে। সেইখিনি নিৰ্ভৰ কৰে শিক্ষকজনৰ বিষয়-বস্তুৰ প্ৰতিটো স্তৰতে থকা 'ধাৰণাৰ-স্পষ্টতাৰ ওপৰত'। গণিতেই হওক বা আন যিকোনো বিষয়েই হওক শিক্ষক এজনে নিশ্চয়কৈ মন কৰিব লাগিব যে শ্ৰেণীকোঠাত ছাত্ৰৰ (ইয়াত 'ছাত্ৰ' শব্দটিৰে ছাত্ৰ বা ছাত্ৰী দুয়োকে বুজোৱা হৈছে) বিষয়ৰ 'জ্ঞান-আহৰণৰ-ক্ষমতা'ৰ এক ভিন্নতা আছে। সেয়ে শিক্ষকৰ লক্ষ্য হোৱা উচিত (এয়া আমাৰহে মত!) শ্ৰেণীটোৰ 'মধ্যম-মান'ৰ ছাত্ৰখিনি! আৰু তেওঁলোককেই 'প্ৰসংগ-মান' কৰি লোৱাটো উচিত। বিশেষকৈ গণিত-শিক্ষণত এয়া আমাৰ মতে খুব প্ৰয়োজনীয়। ছাত্ৰৰ প্ৰতিভাৰ স্তৰক ১, ২, ৩ বুলি নামকৰণ কৰিলে গোটেই কথাখিনিক আমি এনেদৰে ল'ম যে– শ্ৰেণী-কক্ষত পাঠদান কৰি থকা শিক্ষকজনে ২ৰ প্ৰতি মনযোগী হৈ পাঠদান কৰি থাকিব আৰু ১ মানৰ ছাত্ৰই নিজকে 'ধীৰ' আৰু বিপৰীতে ৩ মানৰখিনিয়ে নিজকে 'সজাগ-দ্ৰুততাৰ' মানসিকতা লৈ আগবাঢ়িব। এইখিনি শিক্ষকজনৰ 'পাঠদানৰ-ধাৰা' অনুসৰি ছাত্ৰসকল ইতিমধ্যে জ্ঞাত হৈ থাকিব।

শ্ৰেণীকোঠাৰ প্ৰধান মন কৰিবলগীয়াখিনি হৈছে 'পাঠ্যক্ৰমখিনি এক নিৰ্ধাৰিত সময়ৰ ভিতৰত শেষ কৰিবলগীয়াটো'! আৰু ইয়াৰ ফলতেই বহু ক্ষেত্ৰত গণিতৰ লাগতিয়াল কথা বাদ দি যাবলগীয়া হয়, সেয়া আমি আমাৰ নিজৰ অভিজ্ঞতাৰ পৰায়েই শিকিছোঁ। পিছে ইয়াৰেই গইনা লৈ বহুতো কলেজৰ গণিত-শিক্ষকে এক অতি উদাসীন-মনোভাৱেৰে শিক্ষাদান কৰি যায়। আৰু ছাত্ৰয়ো এই অজুহাতক নিজে নিবিচৰাকৈয়ো মানি লৈ এক গতানুগতিক 'ছাত্ৰ-শিক্ষক'ৰ 'মিলিত উদাসীনতা'ৰ 'গণিত-শ্ৰেণী' চলি থাকিবলৈ অনুমতি দি থাকে!

এতিয়া আমাৰ আলোচনা আৰম্ভ কৰিছোঁ– অলপতে আমি পঢ়িবলৈ পোৱা গণিত-শিক্ষণৰ এক গৱেষণা-গ্ৰন্থৰ (An Introduction to Teaching Mathematics

at the College Level by Suzanne Kelton) এটা আপ্তবাক্য সদৃশ কথা, যিটো সঁচাকৈ মন কৰিবলগীয়া! সেয়া হৈছে– "Is it too late to learn algebra skills in college?" তেনেদৰে হাইস্কুলৰ শিক্ষক এজনেও সুধিব পাৰে, "Is it too late to learn arithmetical skills in high school?" কলেজ-শিক্ষক হিচাপে হোৱা আমাৰ অভিজ্ঞতাৰ সন্দৰ্ভত এয়া অতি বাস্তৱ প্ৰশ্ন বুলিয়েই বিবেচিত হয়।

কলেজ-শিক্ষক এজনে তেওঁৰ শিক্ষণখিনি অধিকাংশ ছাত্ৰৰ বাবে কামত অহা ধৰণৰ হোৱাটো বিচাৰিলে, তেওঁ প্ৰথম এটা বা দুটা শ্ৰেণী ছাত্ৰৰ 'প্ৰাক্-কলেজ' গণিত-জ্ঞানখিনিৰ ধাৰণাখিনিৰ 'এক-ঠাইতে-লোৱা-বাতৰি'ৰ দৰে লৈ থোৱাটো নিতান্তই উচিত। ইয়ে কলেজ-গণিতৰ শ্ৰেণীত থকা সৰ্বাধিক ছাত্ৰৰ ফলপ্ৰসূ শিক্ষণৰ সহায়ক হৈ পৰিব। এইক্ষেত্ৰত হাইস্কুলত শিকি অহা, বিশেষকৈ বীজগণিতীয় ৰাশিৰ যোগ, বিয়োগ, পূৰণ, হৰণ আদি, কৰণী মুক্তকৰণ, উৎপাদক বিশ্লেষণৰ কিছু লাগতিয়াল কৌশল, জটিল উৎপাদকৰ কিছু সূত্ৰৰ লেখীয়া ফল, ইত্যাদিৰ পুনৰালোচনা হোৱা প্ৰয়োজন। ইয়াৰ প্ৰধান কাৰণখিনি হৈছে– 'কলেজ-গণিত' শিকিবলৈ লওঁতে ওপৰত উল্লেখ কৰা বহুতো হাইস্কুলীয়া 'গণিত-জ্ঞান' বহুতো (সাধাৰণ) ছাত্ৰৰ নাথাকে বা পাহৰি থাকে। সেয়ে পাঠদান ফলপ্ৰসূ হ'বলৈ হ'লে 'এইখিনি-খবৰ' ইয়াৰ সৈতে জড়িত হৈ ৰোৱা শিক্ষকজনৰ জ্ঞাত হৈ থকাটো নিতান্তই প্ৰয়োজন। কলেজৰ গণিতৰ পাঠ্যক্ৰমৰ এক বুজন অংশ হৈছে কলন-গণিত। সেয়ে 'প্ৰাক-কলন' গণিতৰ জানিবলগীয়াখিনিৰ সন্দৰ্ভত দায়িত্বত থকা শিক্ষকজনৰ কৰিবলগীয়াও থাকে বহুত। ই প্ৰধানকৈ বীজগণিত আৰু ত্ৰিকোণমিতি সম্পৰ্কীয়। চৰমমান সম্পৰ্কীয় উদাহৰণসমূহত পৰিমেয়কৰণ, উৎপাদক বিশ্লেষণ, কৰণী মুক্তকৰণ ইত্যাদিৰ লেখীয়া হাইস্কুল পৰ্যায়ৰ জ্ঞানখিনি জড়িত হয়। এইবোৰ বিষয়ৰ জ্ঞানৰ অভাৱত শিক্ষক এজন সমস্যাৰ সমুখীন হ'ব লগাত পৰে! 'মেজৰ-শ্ৰেণী'ত গৰিষ্ঠ নিম্ন-পৰিৱদ্ধ (greatest lower bound (glb), maximum value) আৰু লঘিষ্ঠ উচ্চ-পৰিৱদ্ধ (least upper bound (lub), minimum value) আদিৰ লেখীয়া অংশখিনিত ছাত্ৰ বিৰক্ত হয়। তলত এই কথাখিনিৰ এক ব্যাখ্যাত্মক বৰ্ণনা দিয়াৰ চেষ্টা কৰা হৈছে।

কোনো ফলন f অৰ উচ্চ-পৰিৱদ্ধৰ (upper bound) ব্যাখ্যা সাধাৰণ বোধৰ দ্বাৰায়েই হৈ যায় এনেদৰে– ই এটা বাস্তৱ সংখ্যা M য'ত $f(x) \le M$, for all $x \in \operatorname{dom} f$. সেয়ে, যদি কোনো এটা বাস্তৱ সংখ্যা $M_১$ ফলনটোৰ উচ্চ-পৰিৱদ্ধ নহয়, তেনেহ'লে "$f(x) \le M_১$, for all $x \in \operatorname{dom} f$"টো ভুল বা অসত্য! অৰ্থাৎ, এনে এটা $x_১ \in \operatorname{dom} f$ পোৱা যাব, য'ত $f(x_১) \le M_১$ ভুল; আৰু "ইয়াৰ মানে হৈছে $f(x_১) > M_১$"। গতিকে, $M_১$ উচ্চ-পৰিৱদ্ধ নহ'লে ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰত এনে এটা $x_১$ পোৱা যাব যে $f(x_১) > M_১$ হ'ব। এই কথাসমূহত উদাহৰণ জড়িত বিশ্লেষণৰ সহায় লোৱাটো বেচি ফলপ্ৰসূ বিবেচিত হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে: $f(x) = \frac{১}{x}$, $x \in \mathbb{N}$ হ'লে আমি মন কৰিম $\left\{১, \frac{১}{২}, \frac{১}{৩}, \frac{১}{৪}, \ldots\right\}$ সংহতিটো। ইয়াত স্বাভাৱিক সংখ্যা ১ ফলনটোৰ এটা উচ্চ পৰিবদ্ধ। অকল এয়েই নহয়; $১, ২, ৩, \ldots$ ৰ প্ৰতিটোৱে একোটা উচ্চ পৰিবদ্ধ। আৰু এই গোটেইবোৰৰ ভিতৰত ১ টো আটাইতকৈ সৰু আৰু সেয়ে ই লঘিষ্ঠ উচ্চ-পৰিৱদ্ধ (lub) ইত্যাদি। এই সন্দৰ্ভত ওপৰত ব্যাখ্যা কৰা কথাখিনি ছাত্ৰই ধীৰে ধীৰে নিজে মিলাই ল'ব। আমোদজনক কথা ইয়াতই যে আমি এইমাত্ৰ উনুকিওৱা কথাখিনি কৰি চাবলৈ আমনি পায়, আৰু ইয়াতেই "গণিত শিক্ষা তথা শিক্ষণৰ লেঠাখিনি"!

এতিয়া আমি গণিত-শিক্ষণৰ সৈতে ওতঃপ্ৰোতভাৱে জড়িত কিছু কথা উনুকিয়াই লৈছোঁ।

১) শিক্ষকক ছাত্ৰই কথা সুধিবলৈ সংকোচ কৰিবলগীয়া নহ'ব লাগে।

২) ছাত্ৰই কোনো প্ৰশংসনীয় কৰ্ম কৰিলে যথাযোগ্য উৎসাহ প্ৰদান কৰিব লাগে।

৩) এনে বহুতো শিক্ষক দেখা যায় যিয়ে শ্ৰেণী কোঠাত গণিত বুজাই যাওঁতে এনেহে ভাৱ হয় যেনিবা তেওঁ নিজেহে বুজি গৈ আছে।

৪) শিক্ষক হিচাপে নিজৰ বিষয়কেন্দ্ৰিক ভিন্ন প্ৰেক্ষাপটৰ অভিজ্ঞতাখিনি ছাত্ৰক জনালে, ছাত্ৰই সেই প্ৰসংগৰ জ্ঞানখিনিৰ বাস্তৱতা মানি লয়।

৫) কোনো কোনো শিক্ষকে আদিৰে পৰা এনে একোটা পৰিবেশ তৈয়াৰ কৰি লৈ থয় যাক কোৱা হয়– ছাত্ৰই তেওঁৰ প্ৰতি লৈ থকা এক "ভয়ৰ-মনস্তত্ব"। সেয়ে ছাত্ৰই প্ৰশ্ন কৰিবলৈ ভয় কৰে বহুত।

৬) একোজন শিক্ষকে কোনো ছাত্ৰই কৰা প্ৰশ্নৰ উত্তৰত কোৱাখিনি পুনঃউক্তিত বাহিৰে আন একোৰেই নহয়। শিকোৱা কথাখিনি কোনো ছাত্ৰই বুজাত টান পালে প্ৰশ্ন সুধি উলিয়াই ক'ব পাৰিব লাগিব– ক'ত ছাত্ৰজনে বুজি পোৱা নাই আৰু বুজি নোপোৱা কথাখিনি কেনেধৰণে ক'লে সংশ্লিষ্ট ছাত্ৰজনে বুজি পাব। সেই চিন্তাখিনি শিক্ষকে সেই মুহূৰ্ততে ভাবি উলিয়াই লৈ তেওঁ বুজি নোপোৱা ভাৰখিনি আঁতৰাব লাগিব।

৭) সাধাৰণ শৃংখলা সম্পৰ্কীয় প্ৰসংগৰ বাদে, ছাত্ৰই গণিত (আন বিষয়ৰ কথাতো একেই) নোৱৰাৰ বাবে গঞ্জনা-লাঞ্ছনাৰ সমুখীন কৰাব নালাগিব।

৮) অসীমৰ গোলমলীয়াখিনি– উদাহৰণস্বৰূপে $\dfrac{x^২+৩x+৭}{x-৭}$, এনেৰণৰ উদাহৰণ এটিত $x \neq ৭$ কথাটোৱো যে সোমাই আছে সেই কথাটো অনেকেই মন নকৰে। কলন গণিতৰ উদাহৰণ এটিত এনেবোৰ কথাৰেই যে গুৰুত্ব অধিক, সেয়া ছাত্ৰক খৰচি মাৰি বুজাই প্ৰত্যয় নিয়াব লাগে। শূন্যৰে হৰণ কৰিব নোৱৰা কথাটো শ্ৰেণীৰ আৰম্ভণিতে স্পষ্ট কৰি দিয়াটো অতীৱ প্ৰয়োজন!

সদায়েই মনত ৰাখি থ'ব লাগে যে গণিত পাহৰাটো বৰ সহজ– যদিহে অভ্যাস হেৰাই যায়! কলন গণিতৰ শিক্ষাৰ বাবে জড়িত হৈ ৰোৱা উদাহৰণসমূহত 'লেখৰ জ্ঞানখিনি'ৰ গুৰুত্বখিনি মন কৰিব লাগিব। কলেজ পৰ্যায়ত গণিতৰ পাঠ্যক্ৰমৰ মূল পাঠ আৰম্ভ হোৱাৰ পূৰ্বে প্ৰধানকৈ 'প্ৰাক-কলন গণিতীয় জ্ঞানখিনি' পুনৰালোচনা কৰি লোৱাটো উচিত। এই লক্ষ্য আগত ৰাখি কৰিবলগীয়া আলোচনাখিনি হ'ব লাগে প্ৰধানকৈ নিম্নোক্ত বিষয়কেইটাত।

১) পৰিমেয় বীজগণিতীয় ৰাশিৰ সৰলীকৰণ।

২) বহুপদ ৰাশিৰ হৰণ।

৩) জটিল বীজগণিতীয় ৰাশিৰ সৰলীকৰণ।

৪) সমীকৰণ সমাধানৰ বাবে বৰ্গ সম্পূৰণ পদ্ধতিৰ জ্ঞান।

৫) সৰলৰেখাৰ সমীকৰণ আদি– অন্ততঃ কিছু মূল কথা সামৰিব পৰাকৈ।

৬) বক্ৰ-অংকন বা 'Curve-sketching' (এক অতি দৰকাৰী কথা অবকলজৰ প্ৰায়োগিক দিশটোত)।

সমাকল বা অনুকলনৰ বাবে ছাত্ৰই এক বিশাল-পৰিসৰৰ সমাকলনীয় কৌশলৰ সমুখীন হয়। সেয়ে কলনৰ প্ৰাৰম্ভিক কথা জনা ছাত্ৰয়ো এই সন্দৰ্ভত অতি উৎসাহী হৈ পৰে আৰু গণিতৰ এনে তুলনামূলকভাৱে প্ৰিয় উদাহৰণসমূহ নিয়াৰিকৈ কৰিব পৰাকৈ সমাকলন কৰা বিভিন্ন সূত্ৰসমূহ বিভাজন কৰি দিয়াটোও প্ৰয়োজন হৈ পৰে– যাতে উদাহৰণৰ 'পেটাৰ্ণ' মন কৰি যথাযথ ভাগত ল'বলৈ সক্ষম হয়। উদাহৰণস্বৰূপে,

১) সৰল পূৰণৰ প্ৰসাৰণ আৰু য'তেই প্ৰয়োজন হয় ভগ্নাংশৰ সৰলীকৰণ (Expand simple prod-

ucts and simplify fractions when possible)

২) ঘাত সম্পৰ্কীয় নিয়মসমূহ (Power Rule)

৩) প্ৰতিস্থাপন পদ্ধতি (u-substitution)

৪) আংশিক ভগ্নাংশ (Partial Fractions)

৫) ত্ৰিকোণমিতীয় সমাকলন (Trigonometric Integrals)

৬) ত্ৰিকোণমিতীয় প্ৰতিস্থাপন (Trigonometric Substitutions)

৭) খণ্ডিত বা আংশিক সমাকলন (Integration by Parts)

কিছু কথা ছাত্ৰৰ ফালৰ পৰাও শিক্ষকক ভবাই তুলিব পৰা বিধৰ হ'ব পাৰে! তেনে অভিজ্ঞতাও আমাৰ শিক্ষকতাৰ জীৱনত নোহোৱা নহয়! এইখিনিতে পাঠ্যক্ৰমৰ বাহিৰৰ যেন ভাৱ হ'লেও কিছুমান কথা শ্ৰেণীকক্ষৰ ভিতৰত সময় বুজি আলোচনা কৰা উচিত। গণিতৰ বোধভিত্তিক কেতবোৰ কথা কোনো ছাত্ৰই বহুতো কাৰণত মনত নাৰাখে। আৰু ইয়াৰে ফলত অনেক ক্ষেত্ৰত শিক্ষক অসুবিধাৰ সমুখীন হয়। পিছে শিক্ষক এজনৰ নতুনৰ প্ৰতি থকা আকৰ্ষণটোৱে এনে একোটা কথাকো ছাত্ৰজনৰ নিজস্ব চিন্তাক প্ৰশংসা কৰিবলগীয়া স্তৰলৈ লৈ যাব পাৰে, যদিহে শিক্ষকজন এজন 'চিৰিয়াচ্-মানসিকতা'ৰ হয়! এই ক্ষেত্ৰত আমাৰ নিজা অভিজ্ঞতা এটা বৰ্ণনা কৰিছোঁ। এবাৰ এজন ছাত্ৰই শ্ৰেণীত ক'লে যে "শূন্য বিয়োগ অসীম সমান শূন্য"(!), অৰ্থাৎ চিহ্নৰে বৰ্ণানা কৰিলে হয় "$০ - \infty = ০$"(!) আমি ছাত্ৰজনক ধমক দি মনে মনে থাকিবলৈ ক'ব পাৰিলোঁহেঁতেন। পিছে আমি সেয়া নকৰিলোঁ। আমাৰ জানিবলৈ মন গ'ল যে–কিয়নো তেওঁ সেই উত্তৰটো দিলে? মানে তেওঁ কিয়নো ক'লে যে $০ - \infty = ০$? আমাৰ দৃঢ় বিশ্বাস আছিল যে তেওঁ এনেই সেই উত্তৰ দিয়া নাই। ইয়াৰ পাছত ছাত্ৰ আৰু মোৰ (অৰ্থাৎ শিক্ষক) মাজৰ কথোপকথনখিনি আছিল তলত দিয়া ধৰণৰ–

শিক্ষক: তুমি কিয়নো ক'লা $০ - \infty = ০$ বুলি?

ছাত্ৰ: ছাৰ সেয়াইতো হয় দেখোন!

শিক্ষক: ঠিক আছে বাৰু, কোৱাচোন অসীম বা ∞ মানে তুমি কি বুজানো?

ছাত্ৰ: ছাৰ, অসীম বা ∞ মানে 'বহুত ডাঙৰ'।

শিক্ষক: আৰু '$-\infty$' মানে?

ছাত্ৰ: '$-\infty$' মানে 'বহুত সৰু'!

শিক্ষক: ঠিক আছে, 'বহুত সৰু' সংখ্যাটো কিনো?

ছাত্ৰ: 'বহুত সৰু' সংখ্যাটো ০ বা শূন্য!

এইখিনিয়ে আছিল ছাত্ৰজনৰ উত্তৰ আৰু আমি বুজিব পাৰিছিলোঁ তেওঁৰ বাবে কিয়নো $০ - \infty = ০$ হয়! আমি তেতিয়া শ্ৰেণীকোঠাত বৰ উৎফুল্লিত হৈ কথাখিনি আলোচনা কৰিছিলোঁ। ইয়াৰ দ্বাৰা আন ছাত্ৰৰো লাভ হৈছিল। শিক্ষক কমন ৰূমতো প্ৰসংগটো আলোচনা কৰিছিলোঁ। (মন কৰিবলগীয়া যে কিবা কাৰণত ছাত্ৰজনৰ মনত সেইখিনি সময়ত আটাইতকৈ সৰু সংখ্যা বোলোঁতে ঋণ সংখ্যাৰ ধাৰণা অহা নাছিল!)

মহাবিদ্যালয়ৰ গণিতৰ মেজৰৰ পাঠ্যক্ৰমৰ সৈতে জড়িত এই কথাটো মহাবিদ্যালয়ত খৰচি মাৰি আলোচনা কৰা নহয়, অথচ 'থিয়ৰিখিনি' পিছে ছাত্ৰই উপপাদ্যৰ আকাৰত সলসলীয়াকৈ গাই যাব পাৰে। তেনে এটা উপপাদ্যৰেই ব্যাখ্যা এটা তলত দিয়া ধৰণৰ।

সংখ্যাৰ গাণিতিক যুক্তি জড়িত ভেঁটিটোক এক সৰ্বজন-গ্ৰাহ্য ৰূপেৰে স্বীকাৰ্যকৰণ কৰি গৈছে ইটালীয় গণিতজ্ঞ জি. পিআনোৱে ১৮৯৯ চনত। তেওঁ আগবঢ়োৱা স্বীকাৰ্যকেইটাই ইতিমধ্যে জনমানসত থিতাপি লৈ থকা বোধভিত্তিক ভাৱনাখিনিকেই প্ৰতিফলিত কৰি থৈছে। বাৰ্ট্ৰাণ্ড ৰাছেলকে ধৰি আন কেইবাজনেও সংখ্যাৰ অস্তিত্বৰ গাণিতিক বৰ্ণনা আগবঢ়ালেও আজি পিআনোৰ স্বীকাৰ্যভিত্তিক বৰ্ণনা তথা ব্যাখ্যাখিনিয়েই অতি ফলপ্ৰসূ বিবেচিত হৈছে। সংখ্যাৰেখাত আহি পৰা দুই দিশযুক্ত জ্যামিতীয়

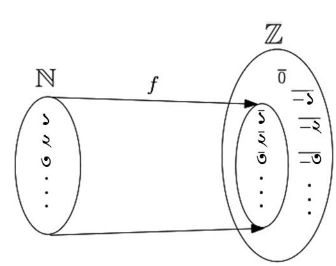
উপলব্ধিখিনিয়ে ধন আৰু ঋণ সংখ্যাৰ অস্তিত্বক ব্যাখ্যা কৰিলেও ই পিছে গাণিতিক চিন্তাৰ সকলো দিশকে সামৰি নথয়। তেনেদৰে কেইবা মহলাৰ ঘৰ এটাৰ গ্ৰাউণ্ড লেভেলক শূন্য, ওপৰৰখিনিক ধন সংখ্যা যুক্ত আৰু তলৰখিনিক ঋণ সংখ্যাৰে বৰ্ণোৱা কৌশলক, আদান-প্ৰদানৰ ক্ষেত্ৰত লাভক ধন আৰু লোকচানক ঋণ ধাৰণা যুক্ত কৰা, 'লিফ্ট' এটাৰ 'গ্ৰাউণ্ড মহলা'ক '০' আৰু 'বেছ'ক '$-$১' নামকৰণ কৰা, ইত্যাদিৰে ব্যৱহাৰিক জগতখনত আহি পৰা সদিশ বা দিশযুক্ত চিন্তা ভাৱনাখিনিৰেও ই যথা দৰকাৰী ক্ষেত্ৰসমূহক নাসামৰে।

পিআনোৱে সেই একেই প্ৰণালীকে লৈছে পুৰণি গ্ৰীকসকলে যি পদ্ধতিৰে জ্যামিতীয় ধাৰণা বিষয়ক তত্ত্ব বিয়পাই দিছিল। আৰম্ভ কৰিছিল কেইটামান সংজ্ঞাৰোৰ্ধৰ 'পদ' আৰু কেইটামান 'স্বীকাৰ্য' বা 'স্বতঃসিদ্ধ'ৰে। আৰু ইয়াৰে পৰাই পাবলৈ সক্ষম হৈছে সংখ্যা প্ৰণালীৰ গোটেইবোৰ বৈশিষ্ট্যক এক 'যুক্তিৰ ফলশ্ৰুতি' হিচাপে।

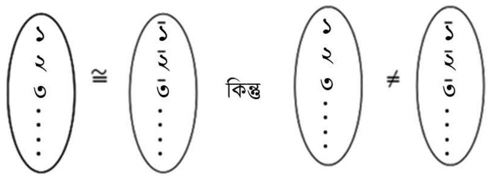
এইখিনিতে উল্লেখনীয় যে উচ্চতৰ শ্ৰেণীৰ ছাত্ৰসকলে পিছে তেওঁলোকৰ মনোজগতত সংখ্যাৰ অস্তিত্বৰ মাজত সোমাই ৰোৱা কথাখিনিৰ 'বীজগণিতীয় স্থিতিখিনি'ক গ্ৰহণ কৰাত কোনো অসুবিধা পোৱা পৰিলক্ষিত নহয়– গণিতৰ উচ্চ স্তৰৰ শ্ৰেণীত। যেনে: এবষ্ট্ৰাক্ট-এলজেব্ৰা বা বিমূৰ্ত-বীজগণিতৰ শ্ৰেণীত পাই অহা: "An integral domain is embedded into a field of fractions" বোলা কথাখিনি খুব সহজতেই বুজি পায় বা মানি লয়। পিছে তাৰেই এক মূৰ্ত উদাহৰণ: অখণ্ড-সংখ্যাৰ (integral domain) পৰা পৰিমেয়-ক্ষেত্ৰ গঠনৰ (field of fractions) গাণিতিক ধাৰাটোক তৎসত্ত্বেও অচিনাকি হিচাপেই লৈ থয়– ছাত্ৰ বা শিক্ষক দুয়োখিনিয়েই। তেনেদৰে অৰ্ধ-বলয় বা ছেমি-ৰিং এটাৰ পৰা যি প্ৰক্ৰিয়াৰে বলয় বা ৰিং এটা পোৱা হয়, ঠিক একেই প্ৰক্ৰিয়াৰে স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ পৰা (এটা ছেমি-ৰিং) অখণ্ড সংখ্যাৰ গঠন প্ৰক্ৰিয়াখিনি অতি অচিনাকি হৈয়েই ৰৈ যায়। আৰু এনেবোৰ কাৰণতেই 'অখণ্ড সংখ্যা ১' আৰু 'পৰিমেয় ১'ৰ মাজত থকা পাৰ্থক্যখিনি ধৰাত অসুবিধা পায়। তেনেদৰে 'স্বাভাৱিক সংখ্যা ১' আৰু 'অখণ্ড সংখ্যা ১'ৰ ক্ষেত্ৰতো। এনেবোৰ ধাৰণাৰ যথা ব্যাখ্যাবোৰ ছাত্ৰৰ দৃষ্টি আকৰ্ষণ কৰোৱাটো শিক্ষকৰ একান্ত দায়িত্বৰেই অন্তৰ্গত।

সাধাৰণতে হাইস্কুল পৰ্যায়ত 'সকলোৱে জনা কথা'– 'প্ৰতিটো স্বাভাৱিক সংখ্যা এটা-অখণ্ড সংখ্যা' বা তেনেদৰে 'প্ৰতিটো অখণ্ড সংখ্যা এটা পৰিমেয় সংখ্যা'। অৰ্থাৎ, সংহতি গণিতৰ ভাষাত স্বাভাৱিক সংখ্যা, অখণ্ড সংখ্যা, পৰিমেয় সংখ্যা আৰু বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিক ক্ৰমে $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ এ বুজালে আমি কওঁ যে $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ইত্যাদি। পিছে উচ্চ স্তৰৰ গণিতত এয়া সঁচা নহয়। অৰ্থাৎ $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z} \not\subset \mathbb{Q} \not\subset \mathbb{R}$ ইত্যাদি। এইখিনি কথা উচ্চ স্তৰৰ ছাত্ৰই নিতান্তই জনাটো প্ৰয়োজন। কিছু তত্ত্বগত ফালৰ পৰা আমি ওপৰত উল্লেখ কৰা কথাখিনিকেই অতি সংক্ষেপে এক 'চিত্ৰ-মাধ্যম'ত কোৱাৰ প্ৰয়াস কৰিছোঁ।

আমাৰ সমস্যাটো হৈছে স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ পৰা অখণ্ড সংখ্যা পোৱা যায় কেনেকৈ! আমি $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ত এটা 'সমতুল্য-সম্পৰ্ক'ৰ জৰিয়তে 'সমতুল্য-শ্ৰেণী' $\mathbb{Z} = \{\ldots, \overline{-২}, \overline{-১}, \overline{০}, \overline{১}, \overline{২}, \ldots\}$ পাওঁ যিয়ে গঠন কৰে অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটোক আৰু লগতে এটা এৰৈকী ফলন f, য'ত $f(x) = \overline{x}$। এই ফলনটোৰ স্থিতিৰ বাবেই $\mathbb{N}$ অৰ f-প্ৰতিবিম্বটো(হে!) $\mathbb{Z}$ অৰ ভিতৰত সোমাই ৰয়, $\mathbb{N}$ টো নহয়!



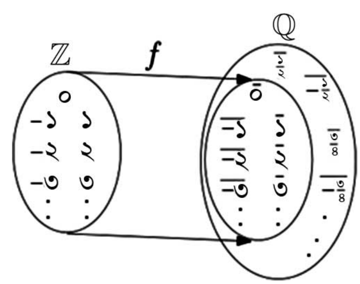
$f(\mathbb{N}) = \{\overline{১}, \overline{২}, \overline{৩}, \ldots\}$



$\overline{১} = \{(১,২),(২,৩),\ldots\}$,
$\overline{২} = \{(১,৩),(২,৪),\ldots\},\ldots$ ইত্যাদি।

মন কৰিবলগীয়া: $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Z}$ আৰু $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Z}$। [A generalization: A semi ring is embedded in a ring.]

তেনেদৰে $\mathbb{Z}$ অৰ পৰা $\mathbb{Q}$ সাজিবলৈ আমি $\mathbb{Z}$ ত এটা 'সমতুল্য-সম্পৰ্ক' দি লওঁ। আৰু তাৰেই সহায়ত আমি কেতবোৰ 'সমতুল্য-শ্ৰেণী' পাওঁ। ইয়েই গঠন কৰে $\mathbb{Q}$ ক। আৰু এই $\mathbb{Q}$ ৰ মাজতেই সোমাই ৰয় $\{\ldots,\overline{-২},\overline{-১},\overline{০},\overline{১},\overline{২},\ldots\}$, যিটো $\mathbb{Z}$ নহয়!

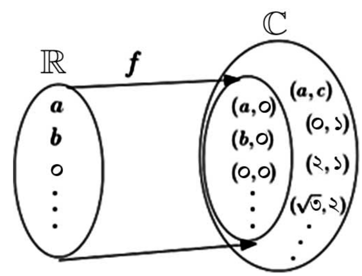


ইয়াত $\mathbb{Q}$ হৈছে,

$$\left\{\ldots,\overline{-\frac{২}{৩}},\overline{-\frac{১}{২}},\overline{-২},\overline{-১},\overline{০},\overline{১},\overline{২},\overline{\frac{১}{২}},\overline{\frac{২}{৩}},\ldots\right\}$$

আৰু এটা একৈকী ফলন f য'ত $f(x) = \overline{x}$ ফলনটোৰ স্থিতিৰ বাবেই $\mathbb{Z}$ অৰ f-প্ৰতিবিম্বটো(হে!) $\mathbb{Q}$ ৰ ভিতৰত সোমাই ৰয়। অৰ্থাৎ, $\mathbb{Z} \cong f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Q}$, কিন্তু $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{Q}$.

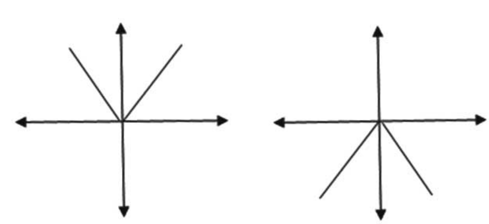
তেনেদৰে জটিল সংখ্যাৰ গাঁঠনিও কৰা হয় তলত দিয়া দৰে। য'ত এনেদৰে সাজি লোৱা $\mathbb{C}$ ত $\mathbb{R}$ অৰ সমতুল্য সংহতি $\{(a,০)|a \in \mathbb{R}\}$ সোমাই ৰয়, যিটো $\mathbb{R}$ নহয়! ইয়াত ওপৰৰ দৰে ল'ব পৰা একৈকী ফলন f অৰ সংজ্ঞাটো হৈছে: $f(x) = (x,০)$, আৰু (a,b) ৰ অৰ্থটো হৈছে $a+ib$. ইয়াত $\mathbb{R} \cong f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C}$, কিন্তু $\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{C}$.



'অৱকলনীয় বক্ৰ'ক 'মিহি-বক্ৰ' বুলি কিয়নো কোৱা হয়?

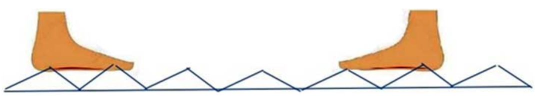
সংজ্ঞা: কোনো এটা বক্ৰ ইয়াৰ প্ৰতি বিন্দুতে অৱকলনীয় হ'লে বক্ৰটোক এটা মিহি বক্ৰ বুলি কোৱা হয়! [খহটা নো কিয় নহ'ল?]

মন কৰিবলগীয়া কথাটো হৈছে যে কোনো সংজ্ঞা দিবলৈ যাওঁতে বাস্তৱৰ সৈতে ই ৰজিতা খাই ৰ'ব লাগে। সেয়ে ইয়াত 'মিহি' বা ইংৰাজীত 'smooth' শব্দটিনো কি কাৰণত আহিল সেইখিনিক মান্যতা দিবলৈ হ'লে, কাৰণটো তলৰ কথাখিনিৰ পৰা সহজতে বোধগম্য হয়!



উদাহৰণ স্বৰূপে, $y = |x|$ আৰু $y = -|x|$ অৰ লেখ দুটা ক্ৰমে ওপৰত দিয়া দৰে হয়।

এই বক্ৰ দুটা 'শিখৰ বিন্দু' $(০,০)$ ত 'অৱকলনীয় নহয়'। তেনে বক্ৰৰ দ্বাৰাই গঠিত তলৰ লেখটোৰে খোজকাঢ়ি যোৱা হওকচোন। উত্তৰটো নিজেই ওলাই ৰয়!



খহটা! অৱকলনীয় নহয় বাবে!

'এটা সত্য' ভিন্ন মাত্ৰাৰ ব্যক্তিৰ ওচৰত ভিন্ন ধৰণে উন্মোচিত হ'ব পাৰে। 'গণিতীয় কোনো সত্য' প্ৰাইমেৰী স্কুল, হাইস্কুল, কলেজ আৰু বিশ্ববিদ্যালয়লৈ ভিন্ন মাত্ৰাৰে উন্মোচিত হ'ব পাৰে। তেনে আন এটা বিশেষভাবে উল্লেখনীয় বিষয় হৈছে– অৱকলন গণিতৰ প্ৰায়োগিক দিশ জড়িত হৈ ৰোৱা উদাহৰণসমূহ, যাৰ এক গুৰুত্বপূৰ্ণ ভূমিকা আছে। কলন গণিত জড়িত হৈ থকা কিছুমান উদাহৰণ জ্যামিতি আৰু কলন গণিত দুয়োৰে সহায়ত সামাধা কৰিব পাৰি। ই আমাৰ মতে এক সুবিধাজনক পৰিস্থিতি! কিয়নো, তেনেবোৰ কথাৰে ছাত্ৰৰ মনযোগ আকৰ্ষণ কৰিব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে, 'এটা বৃত্তৰ অন্তৰ্গত কৰি অঁকা চতুৰ্ভুজসমূহৰ মাজত আটাইতকৈ লঘিষ্ঠ কালিৰ চতুৰ্ভুজটো এটা বৰ্গক্ষেত্ৰ হয়', ইত্যাদি।

এনে একোটা আলোচনাই ছাত্ৰৰ মাজত লুকাই থকা সৃষ্টিশলীতাৰ স্ফুৰণক এক মাত্ৰা প্ৰদান কৰে। এনেবোৰ আলোচনাত অযথা সময় খৰছ হোৱাৰ ভয়খিনি নাথাকে।

নিশ্চিতভাবে, 'ছাত্ৰৰ গুণগত মানো' বহু ক্ষেত্ৰত শিক্ষাৰ ধৰণ নিৰ্ভৰশীল হয়। বিশেষকৈ গণিতৰ দৰে বিষয় এটাৰ ক্ষেত্ৰত! আমাৰ সাধাৰণ পৰীক্ষা পদ্ধতিৰে আনি দিয়া 'উচ্চমান', 'মধ্যমান' আৰু 'নিম্নমান' চিহ্নিত ছাত্ৰৰে ভৰা মহাবিদ্যালয়ত শ্ৰেণী কোঠাটো এক 'অসমসত্ব মান'ৰ ছাত্ৰৰে ভৰি থাকে। আৰু সেয়ে তিনিও মানৰ ছাত্ৰৰেই প্ৰতি লক্ষ্য ৰাখি গণিত শিকোৱা কামটি অতিকে জটিল। ইয়াৰ বাবে শিক্ষকৰ দূৰদৃষ্টিৰ প্ৰয়োজন হয়। তলত দুটামান উদাহৰণ আগবঢ়াইছোঁ।

'উচ্চমান'ৰ ছাত্ৰ এজনৰ বাবে 'বাস্তৱ সংখ্যাৰ বৰ্গ অ-ঋণাত্মক' বোলা কথাষাৰ হয়তোবা সহজতে গ্ৰহণীয়। কিন্তু ইয়াৰ বিপৰীতে, 'মধ্যমান' বা 'নিম্নমান'ৰ ছাত্ৰৰ বাবে তাৰেই এক বীজগণিতীয় প্ৰকাশটোহে যেনে, $(a+b)^{২} \not< ০$ বা $(a+b)^{২} \geq ০$ অধিক ফলপ্ৰসূ বিবেচিত হয়। এই সন্দৰ্ভত *সাধাৰণ ভাষাৰে বৰ্ণোৱা গণিতীয় সমস্যা এটাৰ বীজগণিতীয় চিহ্নৰে প্ৰকাশ কৰাটো এটা অনুশীলনী জড়িত হৈ থকা বিষয়* – এই বিষয়টোত শিক্ষকে মন দিয়া উচিত। অৰ্থাৎ, কথাটো এনেধৰণৰ যেন হয়: 'এটা সংখ্যাৰ বৰ্গৰ দুগুণৰ পৰা সংখ্যাটোৰ তিনিগুণ বিয়োগ কৰিলে পোৱা বিয়োগফলটো অন্য এটা সংখ্যাৰ ঘনফলৰ পৰা ইয়াৰ চাৰিগুণটোৰে পূৰ্বৰ সংখ্যাটোৰ পূৰণফলটোৰ বিয়োগফলটোতকৈ সৰু' – এই কথাখিনি বুজিবলৈ চিহ্নৰ সহায় লৈ কৰা প্ৰকাশখিনিহে সহজবোধ্য হয়। যেনে, $২x^{২} - ৩x < y^{৩} - ৪yx$ আৰু এনেধৰণৰ কথাসমূহৰ সৰল প্ৰকাশৰ প্ৰতি শিক্ষক সদায় সচেতন হৈ থকা দৰকাৰ।

Limit বা চৰম মানৰ ধাৰণাটো:

ধৰা, $f(x) = ২x + ১$. ইয়াত f অৰ আদিক্ষেত্ৰ dom $f = \mathbb{R}$.

x	$f(x)$
১.১	৩.২
১.০১	৩.০২
১.০০১	৩.০০২
১.০০০১	৩.০০০২
$\downarrow$ ১$^{+}$	$\downarrow$ ৩

x	$f(x)$
০.৯	২.৮
০.৯৯	২.৯৮
০.৯৯৯	২.৯৯৮
০.৯৯৯৯	২.৯৯৯৮
$\downarrow$ ১$^{-}$	$\downarrow$ ৩

আৰু এই সমস্ত সংঘটনখিনিকেই প্ৰকাশ কৰা হয় (*) এইদৰে: x অৰ মান ১ অৰ ওচৰ চাপি গৈ থাকিলে $f(x)$ অৰ মান ৩ ৰ ওচৰ চাপি যায়। চিহ্নত এই কথাখিনিয়েই হৈ পৰে:

$$\lim_{x \to ০} f(x) = ৩।$$

কোনো ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰৰ কোনো এক বিন্দুত ফলনটো অবিচ্ছিন্ন (continuous) হ'বলৈ হ'লে সেই বিন্দুটোলৈ ইয়াৰ চৰমমান আৰু সেই বিন্দুটোত ফলনীয় মান একে হ'ব লাগিব। অৰ্থাৎ,

$$\lim_{x \to ০} f(x) = ৩ = f(১)।$$

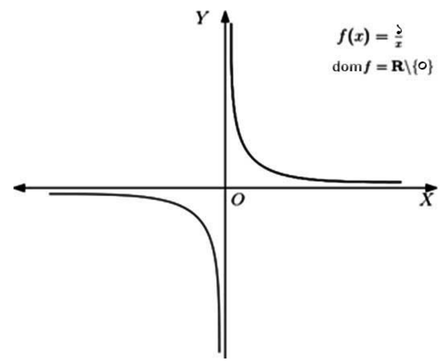
চৰম মান সম্পৰ্কীয় এই কথাখিনি $৩ + ২ = ৫$ বা $৩ \times ২ = ৬$ ৰ দৰে এটা দ্বৈত-প্ৰক্ৰিয়াৰ লেখীয়া কোনো 'প্ৰক্ৰিয়া'ৰ ফলশ্ৰুতি নহয়। ই কোনো আসন্নকৰণৰ দৰে ঘটনাও নহয়! ই ওপৰৰ (*)ত বৰ্ণনা কৰা দৰে 'গণিতীয় বিশ্লেষণ-অভিগমন'ৰ এক সংঘটনহে!

তেনে বিষয়ৰ আন এটা কথা এই প্ৰসংগতেই উল্লেখ কৰি থোৱা ভাল বুলি বিবেচনা কৰিলোঁ। অবিচ্ছিন্নতা সম্পৰ্কীয় বিষয়টোত মহাবিদ্যালয়ৰ পৰ্যায়ৰ গণিত-শিক্ষক বিতৰ্কমূলক কিছুমান প্ৰসংগৰ মাজত সোমাবলগীয়া হয়। কলন গণিতৰ উদাহৰণবোৰত সাধাৰণতে (আগশাৰীৰ মহাবিদ্যালয়সমূহো বাদ পৰি নাযায়) মহাবিদ্যালয় পৰ্যায়ত গণিত-শিক্ষক এনেধৰণৰ প্ৰশ্নৰ সমুখীন হয়: $y = \frac{১}{x}$ ফলনটোৰ $x = ০$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কৰা।

এই প্ৰশ্নটি আলোচনাৰ বাবে লোৱাৰ আগতে আমি জানি ল'ব লগে– এটা ফলনক অবিচ্ছিন্ন বুলি কোৱা হয় কেতিয়া? উত্তৰটো হৈছে– ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰৰ (domain) প্ৰতিটো বিন্দুতেই যদি ই অবিচ্ছিন্ন হয়!

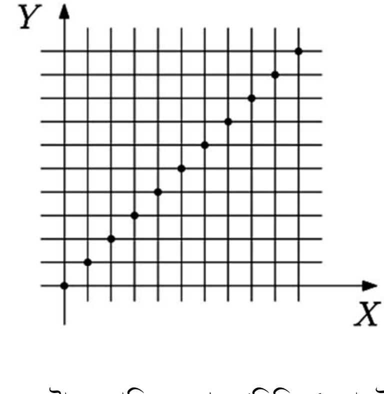
এতিয়া কথা হ'ল, ওপৰৰ ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰত $x = ০$ বিন্দুটো নাই। সেয়ে এই বিন্দুত ফলনটোৰ অবিচ্ছিন্নতা পৰীক্ষা কৰাটো যুক্তি-যুক্ত নহয়! অৰ্থাৎ এই ফলনটো তাৰ আদিক্ষেত্ৰৰ প্ৰতিটো বিন্দুতেই অবিচ্ছিন্ন হয় আৰু সেয়ে ই এটা অবিচ্ছিন্ন ফলন!

(১) এই ফলনটোৰ লেখটো হয় এনেধৰণৰ:



আদিক্ষেত্ৰৰ প্ৰতিটো বিন্দুতে f অবিচ্ছিন্ন, আৰু সেয়েহে বক্ৰটো অবিচ্ছিন্ন। 'দুটা টুকুৰা সত্ত্বেও ই ক'তো ভাঙোন নথকা 'এডাল বক্ৰ'!' এই উপলব্ধিখিনি শিক্ষকে ছাত্ৰক অৱগত কৰাবলৈ হ'লে এক অনুশীলনীৰ প্ৰয়োজন হয়।

(২) ধৰা, $f(x) = x$, য'ত $\mathrm{dom} f = \{১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, ৯, ১০\}$। $Graph f = \{(০, ০), (১, ১), (২, ২), \ldots, (১০, ১০)\}$।

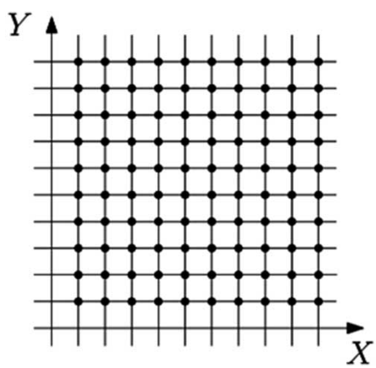


এই ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰখন 'বিবিক্ত' বা ইংৰাজীত

‘discrete’, আৰু সেয়ে তেনে আদিক্ষেত্ৰ যুক্ত ‘যিকোনো ফলনেই অবিচ্ছিন্ন’ হোৱা বাবে, $f(x) = x$ এটা অবিচ্ছিন্ন ফলন আৰু তাৰ লেখটোৰ বিন্দুবোৰ এডাল অদেখা সৰলৰেখাৰে (অবিচ্ছিন্নতাৰ বোধৰ মান্যতাৰে) বান্ধ খাই আছে, ওপৰত দেখুওৱাৰ দৰে!

বিবিক্ত-আদিক্ষেত্ৰ (discrete domain) যুক্ত ৰেখাখণ্ডৰ অবিচ্ছিন্নতাৰ গাণিতিক-মান্যতা (mathematical acceptance) খিনিয়ে ইয়াৰ তলৰ লেখটোত আমি ক’ব খোজা কথাখিনিকো ভাবি চাবলৈ অৱকাশ আনি দিয়ে যে– চালনী এখনৰ জালখন ‘সুৰুঙা-বিহীন’ অস্তিত্ব জড়িত এক অবিচ্ছিন্ন বস্তু।

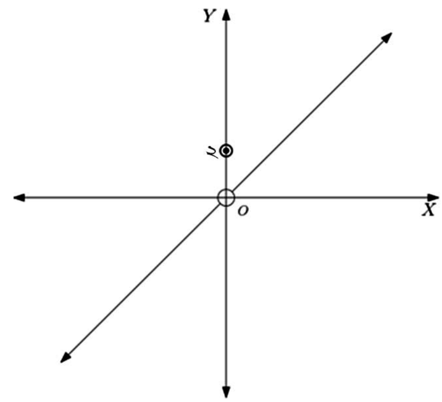
(৩) ই বিবিক্ত-আদিক্ষেত্ৰ সম্পন্ন এক ফলনৰ লেখ:



চালনীৰ অবিচ্ছিন্নতাৰ বোধাত্মক-মান্যতা (intuitive acceptance) খিনিত সেয়ে এটা মন পৰশা কথা আহি যায়: “চালনীখন ফুটা নহয় ....”!

(৪) ফলনীয় মানৰ উপস্থিতিত বিচ্ছিন্ন বক্ৰ: তলৰ উদাহৰণটোত শূন্যলৈ চৰমমানটো শূন্যয়েই হৈ ৰয়। আনহাতে সংজ্ঞানুসৰি ফলনীয় মানটো শূন্য নহয় বাবে ফলনটো শূন্যত বিচ্ছিন্ন।

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^২}{x}, & \text{যদি } x \neq ০ \\ ২, & \text{যদি } x = ০ \end{cases}$$

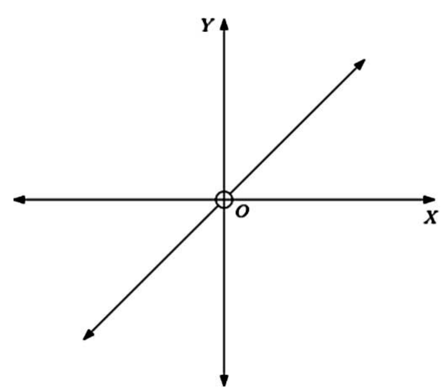


(৫) এক নিৰ্দ্দিষ্ট ফলনীয় মানৰ ‘বিভ্ৰমীয়-অনুপস্থিতি’ত অবিচ্ছিন্ন বক্ৰ:

তলৰ ফলনটোত শূন্যটো আদিক্ষেত্ৰত নাই হেতুকে বাকী প্ৰতিটো বাস্তৱ মানতেই ফলনীয় মান আৰু সেই বিন্দুলৈ চৰম মান একে হয় বাবে প্ৰতিটো বাস্তৱ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হৈ ৰয়। ইয়াত এক ‘জড়তা-জড়িত’ হৈ শূন্যৰ স্থিতিহীনতাটোৱে মন অধিকাৰ কৰি থকা বাবে লেখটোত এটা বিচ্ছিন্নতাৰ ৰেশে প্ৰভাৱ পেলাই ৰয়– সেয়ে, ই যে দুটা টুকুৰাযুক্ত এটা অবিচ্ছিন্ন বক্ৰ, তাক পতিয়ন নিবলৈ এক মানসিক-কৰ্ষণৰ প্ৰয়োজন থাকে।

$$f(x) = \frac{x^২}{x}, \quad x \neq ০।$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{০\}।$$



ওপৰৰ (১), (২), (৩), আৰু (৫) – এনে আকাৰৰ লেখবোৰ যে একোটা অবিচ্ছিন্ন বা নিছিঙা লেখ হৈ ৰৈছে, তাক ছাত্ৰই গ্ৰহণ কৰাৰ মানসিকতাটো আনি দিয়াটো শিক্ষকজনৰ দায়িত্বৰ ভিতৰতে পৰে!

মহাবিদ্যালয় পৰ্যায়ৰ গণিত শিক্ষণত শিক্ষক এজন পূৰ্বকথিত বোধভিত্তিক কথাত সাৰধান হৈ থাকিব লগীয়া হয়। তেনে এক সাৰধানী কথা এটা আমি আলোচনাৰ বাবে লৈছোঁ। এই উদাহৰণটো কলন গণিতৰ সৈতে জড়িত এক ক্ৰুটীপূৰ্ণ শিক্ষণ । কেতিয়াবা প্ৰশ্ন আহে: দেখুওৱা যে $\lim_{x\to ০}\frac{\sin x}{x} = ১$। এই প্ৰশ্নটোৰ উত্তৰত তলত দিয়া অভিগমনখিনি যে ভুল সেয়া শিক্ষকে স্পষ্ট কৰি দিয়াটো অন্য এক দায়িত্ব।

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ০}\frac{\sin x}{x} &= \lim_{x\to ০}\frac{\frac{d(\sin x)}{dx}}{\frac{dx}{dx}}\\ &= \lim_{x\to ০}\frac{\cos x}{১}\quad (???)\\ &= \lim_{x\to ০}\cos x\\ &= ১।\end{aligned}$$

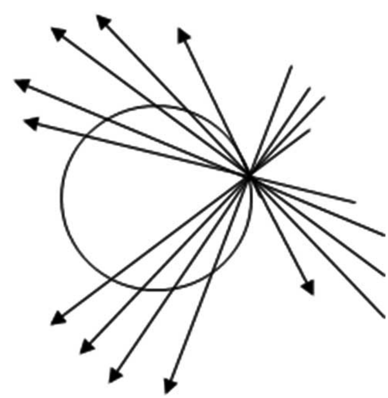
মন কৰিবলগীয়া যে (???) চিন দি থোৱা ঢাপটোত $\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$ লিখা হৈছে। পিছে এই ফলটো প্ৰমাণ কৰিবলৈ যাওঁতে প্ৰথমতে দেখুৱাবলৈ কৰিবলৈ দিয়া $\lim_{x\to ০}\frac{\sin x}{x} = ১$ ফলটো ব্যৱহাৰ হৈ থকা কথাটো মন কৰিব লাগে,

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \lim_{x\to ০}\cos x \times \lim_{x\to ০}\frac{\sin\frac{h}{২}}{\frac{h}{২}},$$

ইত্যাদি। এনেবোৰ পৰ্যবেক্ষণে ধাৰণাভিত্তিক কথাসমূহ অধিক স্পষ্ট ৰূপলৈ আনি দিয়ে।

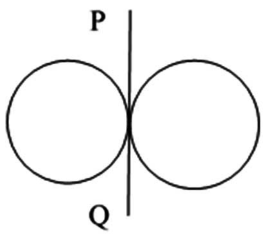
আন এটা বোধভিত্তিক কথা এইখিনিতে উল্লেখ কৰি থৈছোঁ– এডাল সৰলৰেখাই কোনো এটা বক্ৰক ‘দুটা একে বিন্দুত কটা’ কথাটো যে বক্ৰটোৰে বিন্দুটোত ‘স্পৰ্শ কৰাৰ সমতুল্য’ হয়, এইখিনি কথা বুজিবলৈ হ’লে স্পৰ্শকৰ সংজ্ঞা ভালদৰে বুজি ল’ব লাগে। ইয়াৰ দ্বাৰা আমি ইয়াকেই ক’ব বিচাৰিছোঁ যে– স্পৰ্শকৰ সংজ্ঞা যে ‘ছেদক ৰেখাৰ ক্ৰমাগত অগ্ৰসৰতাৰ এক চৰম-ফলহে’! আৰু এনে এক ধাৰণাৰেই কলন গণিতৰ অৱকলজৰ ধাৰণাটো সক্ৰিয় হৈ ৰৈছে।

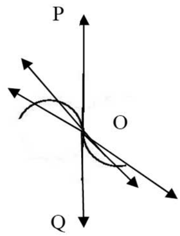
ছাত্ৰ বিমোৰত পৰা বা প্ৰায়েই নভবাকৈ থাকি যোৱা কলেজ-গণিতৰ এক বিমূৰ্ত ধাৰণা হৈছে– বৃত্তৰ স্পৰ্শকৰ সৈতে জড়িত কথাটো! এইখিনি সাধাৰণজনৰ বাবেই আমি তলত বৰ্ণনা কৰিছোঁ– কাৰণ মাথোন এটায়েই– সেয়া হ’ল গণিতৰ বোধ কিমান গুৰুত্বপূৰ্ণ তাকে সাব্যস্ত কৰিবলৈ! কোনো বক্ৰৰ কোনো নিৰ্দিষ্ট বিন্দুত স্পৰ্শক হৈছে সেই বিন্দুৰে যোৱা ছেদক ৰেখাসমূহৰ চৰম অৱস্থান এটা (তলৰ চিত্ৰত দেখুওৱা দৰে)।



ঠিক এই ধাৰণাৰেই, তলৰ প্ৰথমটো চিত্ৰত অঁকা হৈছে দুটা বৃত্তৰ সাধাৰণ স্পৰ্শক PQ। আনহাতে, ইয়াৰ প্ৰথম বৃত্তটোৰ ‘নিম্ন অংশ’ৰ কিছু ‘মচি লৈ’ আৰু দ্বিতীয় বৃত্তটোৰ ‘ওপৰৰ অংশ’ৰ কিছু ‘মচি লৈ’ সোঁকাষৰ দ্বিতীয়টো চিত্ৰ পোৱা গৈছে। দেখা যায় যে ওপৰত বৰ্ণনা কৰা স্পৰ্শকৰ ব্যাখ্যা অনুসৰি সোঁকাষৰ চিত্ৰতো PQ

ৰেখা স্পৰ্শক হৈয়েই ৰৈছে। আন এডাল ৰেখাৰ যিটো বিন্দুত স্পৰ্শক হৈ ৰয় তেনে এটা বিন্দুক (O) কোৱা হয় 'নতি-বিন্দু' বা 'পইণ্ট্-অফ্-ইনফ্লেক্সন'।





শ্ৰেণীকোঠাত এনেবোৰ আলোচনাৰ দ্বাৰা স্পৰ্শকৰ ধাৰণা মূৰ্ত হৈ উঠে, কলন গণিতৰ বহুতো সমস্যা বুজাত সহজ হয়।

আন এক মন কৰিবলগীয়া কথা হৈছে, গুৰুত্ব সহকাৰে ছাত্ৰৰ মন আকৰ্ষণ কৰিব লাগে যে– 'গণিতীয় আবেশ বিষয়টো'ৰ প্ৰথম ঢাপত $n = ১$ অৰ বাবে পোৱা সত্যতাখিনি 'প্ৰমাণ নহয়', ই 'সত্যাপিত ফল'হে! সেয়ে 'সত্যাপন' আৰু 'প্ৰমাণ'ৰ মাজৰ পাৰ্থক্যখিনিতো মন দিবলগীয়া আছে! এনেবোৰ কথা হাইস্কুল বা প্ৰাক্-বিশ্ববিদ্যালয়ৰ কথা হ'লেও পুনৰালোচনাত ই ঠাই পোৱা একান্তই দৰকাৰ।

'বিৰোধ-উদাহৰণ' (counter-example) গণিতৰ এক অতি দৰকাৰী জ্ঞান। উদাহৰণস্বৰূপে,

- 'অৱকলনীয় ফলন এটা ইয়াৰ আদিক্ষেত্ৰৰ প্ৰতি বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন'। পিছে বিপৰীতটো সত্য নহয়। (ইয়াত প্ৰতি-উদাহৰণ বা counter-example অৰ প্ৰয়োজন হয়!)
- 'কোনো ফলনৰ কোনো বিন্দুত অৱকলজ-মান শূন্য হ'লে সেই বিন্দুত ফলনৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান থাকে'। পিছে বিপৰীতটো সত্য নহয়। (ইয়াত প্ৰতি-উদাহৰণৰ প্ৰয়োজন হয়!)
- 'কোনো সীমিত সংঘ বা গ্ৰুপৰ অৰ্ডাৰ বা ঘাতটো উপসংঘৰ অৰ্ডাৰ বা ঘাতৰ দ্বাৰা বিভাজ্য'। পিছে বিপৰীতটো সত্য নহয়। (ইয়াত প্ৰতি-উদাহৰণৰ প্ৰয়োজন হয়!)

আন এটা অতি দৰকাৰী কথা ছাত্ৰৰ মনৰ ভিতৰত খোদিত হৈ ৰৈ থকাকৈ কৈ থোৱাটো উচিত, সেয়া হ'ল– মৌলকক্ষ আৰু নিৰ্ণায়কৰ পাৰ্থক্যটো! 'মৌলকক্ষ এটা সজ্জা' মাথোন আৰু বিপৰীতে 'নিৰ্ণায়ক এটা সংখ্যা'। মৌলকক্ষৰ উৎপত্তি বা উদ্ভাৱনৰ আঁৰৰ কথাখিনি পাৰিলে কৈ থোৱাটো উচিত, যিখিনি আমি মহাবিদ্যালয়ৰ শিক্ষক হৈ থাকোঁতে চেষ্টা কৰিছিলোঁ। তলৰ উদাহৰণটোত আমি মন দিছোঁ এনেদৰে–

$$\begin{array}{l} ২x + ৩y = ১ \\ ৩x - ৪y = -৭ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} ৮x + ১২y = ৪ \\ ৯x - ১২y = -২১ \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} ১৭x + ০y = -১৭ \\ ৯x - ১২y = -২১ \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x + ০y = -১ \\ ৯x - ১২y = -২১ \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x + ০y = -১ \\ ০x - ১২y = -১২ \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x + ০y = -১ \\ ০x - y = -১ \end{array}$$

এতিয়া আমি x আৰু y ৰ অৱস্থানক স্বাভাৱিকভাবে থাকিবলগা স্থানতে থকা বুলি ধৰি, কেৱল সংখ্যাবোৰেৰে কেনেনো ৰূপ লয় তাক মন কৰিব

খুজিছোঁ এনেদৰে-

$$\begin{array}{l} ২, +৩ = ১ \\ ৩, -৪ = -৭ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} ৮, +১২ = ৪ \\ ৯, -১২ = -২১ \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} ১৭, +০ = -১৭ \\ ৯, -১২ = -২১ \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} ১, +০ = -১ \\ ১, -১২ = -২১ \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} ১, +০ = -১ \\ ০, -১২ = -১২ \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} ১, +০ = -১ \\ ০, -১ = -১ \end{array}$$

ছাত্ৰই মন কৰিব, এই সমীকৰণৰ যোৰকেইটাক মৌলকক্ষৰ ৰূপত চাব পাৰোঁ তলত দিয়া ধৰণে-

$$\begin{bmatrix} ২ & ৩ \\ ৩ & -৪ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ১ \\ -৭ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ৮ & ১২ \\ ৯ & -১২ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ৪ \\ -২১ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ১৭ & ০ \\ ৯ & -১২ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -১৭ \\ -২১ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ১ & ০ \\ ০ & -১২ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -১ \\ -২১ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ১ & ০ \\ ০ & -১২ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -১ \\ -১২ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ১ & ০ \\ ০ & -১ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -১ \\ -১ \end{bmatrix}$$

ইয়াৰ পৰা পোৱা যায় $x = -১, \quad y = ১$। উল্লেখ্য যে- এনেবোৰ ব্যাখ্যা পাঠ্যক্ৰমত নালাগে সঁচা, পিছে মৌলকক্ষৰ ধাৰণাৰ উৎসটো ক'ত বুলি মনত ভাৱ আহিলে এনেদৰেও ভাবি উত্তৰটো নিজেই দিব পাৰি আৰু গণিতক এনেদৰেই মনোগ্ৰাহী কৰি ল'ব পাৰি নিজে নিজে। এইখিনিতেই শিক্ষকে এনেধৰণে আহি পৰা মৌলকক্ষ নামৰ সজ্জাৰ যে বহল প্ৰেক্ষাপট জড়িত এক উৰ্বৰ গাণিতিক শাখাই অতি গধূৰ আৰু ফলপ্ৰসূ হাতিয়াৰৰ অস্তিত্বৰ ইংগিত দিয়ে তাৰো এক পূৰ্বাভাষ দি থোৱা প্ৰয়োজন। লক্ষণীয় যে কোনো (বহিঃ)কৃত্ৰিমতা নোহোৱাকৈ গাণিতিক ধাৰণাক ছাত্ৰৰ মাজত বিয়পাই দিয়াৰ এক ধাৰণাত্মক অভিগমনে (approach) ছাত্ৰৰ মন পৰশে। আৰু যিকোনো নতুন গাণিতিক ধাৰণা শ্ৰেণীত পোনপ্ৰথমবাৰৰ বাবে দিবলৈ যোৱাৰ মুহূৰ্তত তেনে এক অভিগমন পাৰ্যমানে দিয়াৰ চেষ্টা কৰাটো উচিত। তেনে উল্লেখযোগ্য অভিগমন হ'ব পাৰে, ওপৰত উল্লেখ কৰা সহ-সমীকৰণৰ পদ্ধতিগত সমাধান পদ্ধতিৰ মাজত সোমাই ৰোৱা মৌলকক্ষৰ অস্তিত্বৰ ঘটনাটো!

বিমূৰ্ত-বীজগণিতৰ মাজত সোমাই থকা আধুনিক গণিতৰ প্ৰায় সৰ্বত্ৰ প্ৰযোজ্য হৈ ৰয় সংহতি গণিতৰ ধাৰণা। উদাহৰণস্বৰূপে গ্ৰুপ বা সংঘৰ ধাৰণা আনিব পাৰি দুই ধৰণে। এটা হ'ল- অখণ্ড সংখ্যাৰ সৈতে জড়িত হৈ ৰোৱা সকলোৰে জনা স্বাভাৱিক যোগ আৰু পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াই আনি দিয়া বৈশিষ্ট্যসমূহৰ মাজত সোমাই থকা 'গ্ৰুপ-চৰিত্ৰ'। এনেবোৰ উদাহৰণৰ বিপৰীতে গ্ৰুপৰ ধাৰণালৈ বুলি যোৱাৰ আগতে অকল সংহতিৰ ধাৰণাৰ সহায়ত 'গ্ৰুপ' নামৰ-এই ধাৰণাৰ পৰিচয়জ্ঞাপক আৰম্ভণিখিনি কৰিব পাৰি। সংহতিৰ সৈতে জড়িত হৈ ৰয়- ফলনৰ ধাৰণা। গতিকে এটা সংহতিৰ পৰা নিজলৈ বুলি সম্ভৱপৰ সকলো 'আচ্ছাদিত-একৈকী ফলনে' ফলনৰ স্বাভাৱিক সন্মিলনেৰে এটা গ্ৰুপ বা সংঘৰ ধাৰণা আনে। এনে একোটা আৰম্ভণিকে গণিতত 'গ্ৰুপৰ স্বাভাৱিক পৰিচয়জ্ঞাপক' (natural existence of a group) আৰম্ভণি বুলি কোৱা হয়।

তেনেদৰে ৰিং বা বলয়ৰ ধাৰণাৰ বাবেও দুই প্ৰকাৰৰ আৰম্ভণি হ'ব পাৰে। এক, অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিৰ মাজত সোমাই ৰোৱা বলয়ৰ বৈশিষ্ট্যসমূহক আলোচনা কৰি লৈ বলয় এটাৰ ধাৰণা দিব পাৰি। আৰু এই কাৰণতেই অখণ্ড সংখ্যাক বলয়ৰ 'fundamental building block' বুলি কোৱা হয়। তেনেদৰে বলয়ৰ ধাৰণাৰ স্বাভাৱিক পৰিচয়জ্ঞাপক কথাটো হৈছে– 'কোনো এক আবেলীয়-গ্ৰুপৰ নিজৰ মাজতে হৈ ৰোৱা এক বিশেষধৰণৰ ফলনৰ সংহতিয়ে (homomorphism) এক স্বাভাৱিক বলয় গঠন কৰে।' এনে এক বলয়ৰ অস্তিত্বত কোনো কৃত্ৰিমভাবে সাজি লোৱা কথা নাথাকে আৰু সেয়েহে ইয়াক বলয়ৰ এক স্বাভাৱিক পৰিচয়জ্ঞাপক গঠন (natural existence of a ring!) বুলি কোৱা হয়! এইখিনি কথা এই কাৰণতে উল্লেখ কৰা হৈছে যে- গণিতৰ ধাৰণা একোটাৰ 'স্বাভাৱিক-পৰিচয়জ্ঞাপক' (natural existence) কথাটোনো কি বুলি প্ৰশ্ন কৰিলে কেনেধৰণে আমি উত্তৰটো পাব পাৰোঁ ই তাৰ এক ব্যাখ্যা।

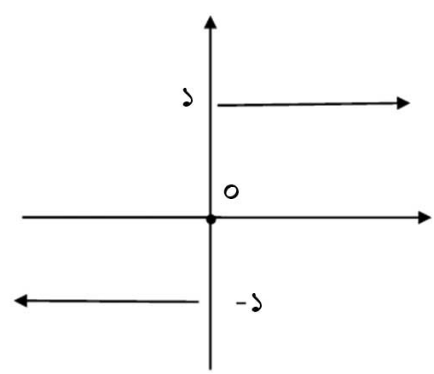
এইবাৰ আমি আকৌ আহিছোঁ কলেজ গণিতৰ অন্যতম গুৰুত্বপূৰ্ণ বিষয় অনৱচ্ছিন্নতা আৰু চৰম-মানৰ প্ৰসংগটোলৈ! $f(a)$ আৰু $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ অৰ পাৰ্থক্যখিনি বুজিবলৈ লেখৰ সহায় লোৱা নিতান্তই প্ৰয়োজনীয়। এইখিনি কথা আমি তলৰ লেখকেইটাৰে বুজি ল'ব খুজিছোঁ। তলৰ উদাহৰণ কেইটাত প্ৰতিটো ফলনৰে আদিক্ষেত্ৰ বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি $\mathbb{R}$।

(১) এই ফলনটো

$$f(x) = \begin{cases} ১,\ \text{যদি } x > ০ \\ ০,\ \text{যদি } x = ০ \\ -১,\ \text{যদি } x < ০, \end{cases}$$

$x = ০$ ত অবিচ্ছিন্ন। এই বিন্দুটোলৈ চৰমমানো নাই! কাৰণ: x অৰ ধন মানৰ বাবে ফলনীয় মান সদায়েই ১ হৈ থাকে। সেয়ে ০ লৈ সোঁহতীয়া চৰমমানটো ১ আৰু x অৰ ঋণ মানৰ বাবে সদায়েই ফলনীয় মানবোৰ -১ হৈ থাকে। সেয়ে ০ লৈ বাওঁহতীয়া চৰমমানটো -১। আনহাতে ০ ত পিছে ফলনীয় মানটো হয় ০। $\lim\limits_{x\to ০^+} f(x) = ১$, $f(০) = ০$, $\lim\limits_{x\to ০^-} f(x) = -১$।

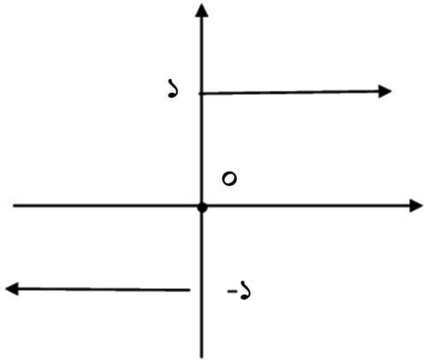
এই ফলনটোৰেই 'ছিগনাম-ফলন' যাৰ অন্য এক প্ৰকাশ হৈছে $\operatorname{sgn} x$। মন কৰিবলগীয়া যে: এই উদাহৰণটো এটা আৰোপিত উদাহৰণ, য'ত আলোচিত বিন্দুটোলৈ চৰম মানৰ স্থিতি নাই, যদিওবা ফলনীয় মানৰ আছে।



২) তলত দিয়া উদাহৰণটো ব্যাখ্যা অবিহনে বুজিব পৰা হৈ থকা ছবি এখন। ইয়াত সোঁহতীয়া চৰম মানটো ফলনীয় মানেৰে উপৰিপতন হৈ ৰৈছে আৰু বাওঁহতীয়া চৰম মানটো অমিল হৈ ৰৈছে আৰু ই হৈ পৰিছে এটা বিচ্ছিন্ন ফলন, ০ বিন্দুত।

$$f(x) = \begin{cases} ১,\ \text{যদি } x \geq ০ \\ -১,\ \text{যদি } x < ০। \end{cases}$$

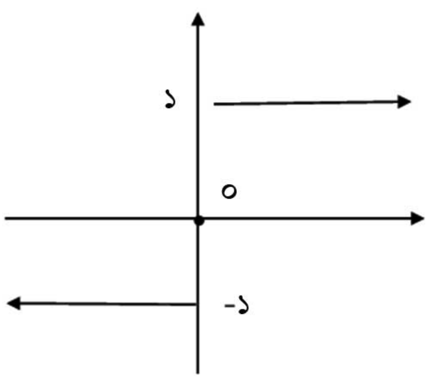
ইয়াত, $\lim\limits_{x\to ০^+} f(x) = ১ = f(০)$ আৰু $\lim\limits_{x\to ০^-} f(x) = -১$।



৩) এই তৃতীয় উদাহৰণটোত সদৃশ সংঘটন ঘটিছে; বাওঁ আৰু সোঁ-ৰ সলনা-সলনি হৈ।

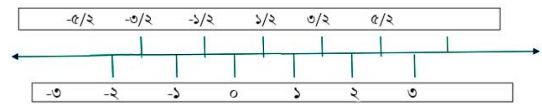
$$f(x) = \begin{cases} ১, \text{ যদি } x > ০ \\ -১, \text{ যদি } x \leq ০ । \end{cases}$$

ইয়াত, $\lim_{x \to ০^+} f(x) = ১$ আৰু $\lim_{x \to ০^-} f(x) = -১ = f(০)$।



বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা ফলন:

বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা ফলনৰ ব্যৱহাৰ সাধাৰণতে হৈ থাকে সম্ভাৱিতা-তত্ত্বৰ দৰে ক্ষেত্ৰবোৰত, য'ত 'বস্তুৰ সংখ্যা'ৰহে (number of entity) প্ৰয়োজন হয় আৰু তেনেদৰে প্ৰয়োগ হয় পদাৰ্থ বিজ্ঞানত– য'ত প্ৰধানকৈ ফলনীয়-মানৰ অখণ্ডমানহে প্ৰয়োজন হয়, বিশেষকৈ 'শব্দ-প্ৰতিফলনে' 'স্থিতিস্থাপক-সহগ'ৰ (coefficient of restitution) সৈতে জড়িত হোৱা ক্ষেত্ৰবোৰৰ প্ৰসংগত, ইত্যাদি। ছাত্ৰৰ তথ্যৰ চাহিদা পূৰণৰ বাবে এনেবোৰ তথ্যৰে গণিত-শিক্ষক এজন সদা সাজু হৈ থকাটোও শিক্ষকৰ একোটা বৈশিষ্ট্য হিচাপেই পৰিগণিত হয়। এই ফলন জড়িত হৈ থকা দুটা উদাহৰণ লোৱাৰ পূৰ্বেই আমি সংখ্যাৰেখাক আমাৰ সমুখত লৈ থৈছোঁ:



$\lfloor x \rfloor$ **অৰ সংজ্ঞাটো:** x-তকৈ সৰু বা সমান বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যাটো। (এতিয়া, তলৰ 'ডায়েলগখিনি' ছাত্ৰসকলে মন কৰিব।)

প্ৰ: ওপৰৰ সংজ্ঞানুসৰি, $x = \frac{৩}{২}$ হ'লে, $\left\lfloor \frac{৩}{২} \right\rfloor$ মানে কি?

উ: $x = \frac{৩}{২}$ তকৈ সৰু বা সমান বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যাটো।

প্ৰ: $x = \frac{৩}{২}$ তকৈ সৰু বা সমান অখণ্ড সংখ্যাবোৰ কিনো?

উ: $\ldots, -১, ০, ১$।

প্ৰ: এইবোৰৰ ভিতৰত আটাইতকৈ ডাঙৰ কোনটো?

উ: ১ টো।

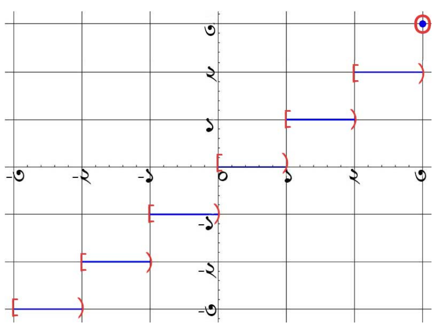
প্ৰ: গতিকে, $\left\lfloor \frac{৩}{২} \right\rfloor = ১$ নহয়নে?

তেনেদৰে, $\left\lfloor \frac{১}{২} \right\rfloor$ তকৈ সৰু বা সমান অখণ্ড সংখ্যাবোৰ $\ldots, -১, ০$ আৰু এইসমূহৰ ভিতৰত আটাইতকৈ ডাঙৰটো হৈছে ০; সেয়ে $\left\lfloor \frac{১}{২} \right\rfloor = ০$।

আকৌ, $\left\lfloor -\frac{১}{২} \right\rfloor$ তকৈ সৰু বা সমান অখণ্ড

সংখ্যাবোৰ $\ldots, -২, -১$ আৰু এইসমূহৰ আটাইতকৈ ডাঙৰটো হৈছে -১; সেয়ে $\left\lfloor -\frac{১}{২} \right\rfloor = -১$, ইত্যাদি।

$\lfloor x \rfloor$ ফলনটোত বন্ধ আদিক্ষেত্ৰ একোটাৰ (যেনে $[-৩, ৩]$ ৰ বাবে) এটা বিশেষত্ব আছে, গোটেই বাস্তৱ সংখ্যাৰেখা $(-\infty, \infty)$ ৰ বিপৰীতে। সেয়া হৈছে এনে বন্ধ-অন্তৰালৰ আদিক্ষেত্ৰ যুক্ত হৈ থাকিলে এই ফলনটোৰ লেখটোত একোটা অকলশৰীয়া বিন্দু পোৱা যাব (ইয়াত $(৩, ৩)$ বিন্দুটো) আৰু তাকেই ছাত্ৰই আঁকোতে এৰি যায় বাৰে বাৰে!



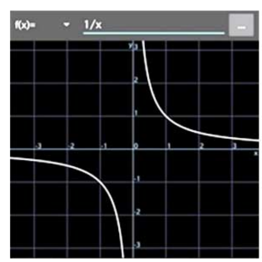
দ্বিতীয় উদাহৰণ: $\dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$

- পোন প্ৰথমতে ছাত্ৰৰ মনত ই এটা অচিনাকি ফলন যেন লাগে, ইয়াৰ গঠনটোৰ কাৰণে!
- অলপ চোৱাৰ পাছত ভাব হয় $\lfloor x \rfloor$ অৰ মান সদায় অখণ্ড সংখ্যা হয়।
- আৰু সেই কাৰণতেই এটা আণ্ডাজ আহি যায় যে ফলনটোত সোমাই থকা ভগ্নাংশৰ লবটোত অখণ্ড সংখ্যা হয় বাবে ফলনটো $\frac{১}{x}$ অৰ ঠাঁচৰ ভিতৰতেই পৰিব। সেয়ে আমি ইতিমধ্যে আলোচনা কৰি অহা ফলন $\frac{১}{x}$ ত মন দিম।
- তাৰোপৰি, লবৰ স্থানত ভিন-ভিন অন্তৰালত ভিন-ভিন অখণ্ড সংখ্যা আহি পৰিব বাবে যথা অন্তৰালসমূহত $\frac{১}{x}$ অৰ ভিন ভিন ঠাঁচ $\frac{১}{x}, \frac{২}{x}, \frac{৩}{x}, \ldots$ য়ে ভুমুকি মাৰিব।

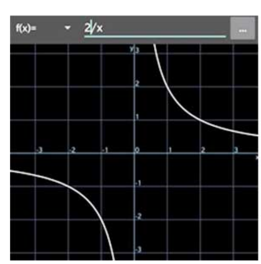
গতিকে দেখা যায়: $\dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$ ফলনটোৰ লেখৰ বাবে আঁকোতাৰ মনত,

- পূৰ্ব ধাৰণা হিচাপে $\frac{১}{x}$ অৰ লেখৰ ধাৰণাটো থাকিলে সুবিধা হয়।
- ওপৰৰ আলোচনাৰ পৰা এয়া আহি পৰে যে ইয়াৰ ঠাঁচটো নিৰ্ভৰ কৰে ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰটো কি ধৰা হৈছে তাৰ ওপৰত। তথাপি মূল ঠাঁচটোৰ আভাষখিনিৰেও বহু আগুৱাব পৰা যায়।

এতিয়া আমি চাওঁ, $১ \leq x < ২$ ৰ বাবে, $f(x) = \frac{১}{x} \equiv \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$, কাৰণ এই অন্তৰালত $\lfloor x \rfloor = ১$।

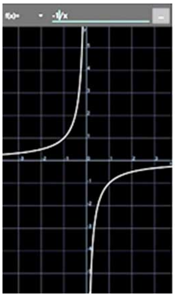


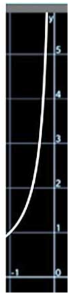
$২ \leq x < ৩$ ৰ বাবে, $f(x) = \frac{২}{x} \equiv \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$, কাৰণ এই অন্তৰালত $\lfloor x \rfloor = ২$।



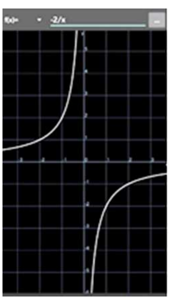
$০ \leq x < ১$ অৰ বাবে, $f(x) = ০ \equiv \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$, কাৰণ এই অন্তৰালত $\lfloor x \rfloor = ০$।

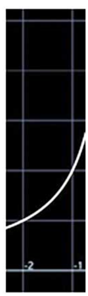
আকৌ, $-১ \leq x < ০$ ৰ বাবে, $f(x) = -\frac{১}{x} \equiv \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$, কাৰণ এই অন্তৰালত $\lfloor x \rfloor = -১$।



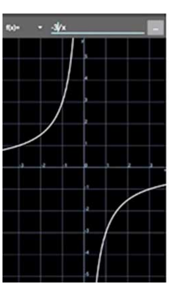


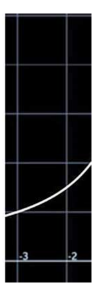
$-২ \leq x < -১$ অৰ বাবে, $f(x) = -\frac{২}{x} \equiv \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$, কাৰণ এই অন্তৰালত $\lfloor x \rfloor = -২$।



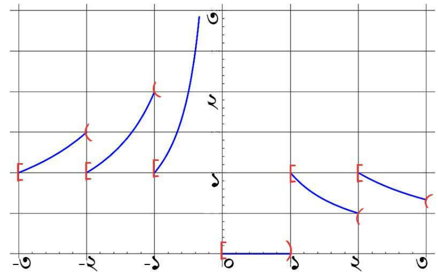


$-৩ \leq x < -২$ ৰ বাবে, $f(x) = -\frac{৩}{x} \equiv \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$, কাৰণ এই অন্তৰালত $\lfloor x \rfloor = -৩$।





এতিয়া, ওপৰৰ লেখকেইটা মন কৰি আমি, $\frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ অৰ লেখৰ এটা মোটামুটি ৰূপ তলত দিয়া ধৰণে পাওঁ:



ইয়াত মন কৰিবলগীয়াখিনি এই যে, লেখটোৰ প্ৰতিটো টুকুৰাৰেই বাওঁমূৰটো বন্ধ আৰু সোঁমূৰটো মুক্ত।

মোখনি:

পুনৰবাৰ উল্লেখ কৰি থ'ব খুজিছোঁ যে বহুতে যশস্বী লেখকে কোৱাৰ দৰে 'গল্পৰ ছলেৰে গণিত-শিক্ষা'ক মনোগ্ৰাহী কৰি লোৱাৰ ভাৱনাটোৰ পক্ষ আমি সমৰ্থন নকৰোঁ। এই বিষয়ত আমাৰ নিজৰ অভিজ্ঞতাই আনি দিয়া নিজস্ব মতটো হৈছে এনেধৰণৰ– গণিত অধিকাংশ ছাত্ৰৰে ভাল নলগাৰ প্ৰধান কাৰণটো হৈছে, ইয়াৰ সৈতে জড়িত হৈ ৰোৱা 'মিলিটেৰী-ডিচিপ্লিন্' বা 'সামৰিক-শৃংখলা'ৰ ধাৰাটো। এয়া সৰ্বজন-স্বীকৃত যে 'মিলিটেৰী-ডিচিপ্লিন্' বা 'সামৰিক-শৃংখলা' বোলা কথাটো 'সাধাৰণ-ৰাইজ'ৰ বাবে 'খুব-প্ৰিয়' কথা নহয়। বহু অভ্যাস তথা অনুশীলনেৰেহে এই শৃংখলা আয়ত্ব কৰা হয়। একেদৰে 'গণিতীয় শৃংখলা'তো ঠিক একে কথাই প্ৰযোজ্য হয়। 'সামৰিক-শৃংখলা' যি কাৰণত 'সাধাৰণ ৰাইজ'ৰ কাৰণে বিৰক্তিকৰ, সেই একেই কাৰণত 'গণিতো অনেকৰ বাবে বিৰক্তিকৰ' হৈ পৰে। সামৰিক শৃংখলা মজ্জাগত হৈ পৰাজনৰ বাবে এনে শৃংখলাৰ মাজত এক সৌন্দৰ্য বিচাৰি পায় সামৰিক বিভাগৰ মানুহে, ঠিক তেনেদৰে 'গণিতীয়-শৃংখলা' মজ্জাগত হৈ পৰাজনৰ বাবেহে গণিত মোহনীয় হৈ পৰে– সৌন্দৰ্যই ঠাই উলিয়াই দিয়ে!

(লেখাটো প্ৰস্তুত কৰোঁতে বহুদিন আগতে গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়ৰ দুগৰাকী শিক্ষকৰ সৈতে হোৱা আলোচনাখিনিৰো অৱদানখিনি সুঁৱৰিছোঁ।)