ৰামানুজনৰ বাগিচাৰে পদব্ৰজে ভ্ৰমণ

ফ্ৰিমেন জে. ডাইছন • অনুবাদ : প্ৰিয়াংকুশ ডেকা

অনুবাদক: স্নাতকোত্তৰ দ্বিতীয় বৰ্ষ, পদাৰ্থবিজ্ঞান বিভাগ, ভাৰতীয় প্ৰযুক্তিবিদ্যা প্ৰতিষ্ঠান গুৱাহাটী

১৯৮৭ চনৰ ১ জুনৰ পৰা ৫ জুনলৈ আমেৰিকা যুক্তৰাষ্ট্ৰৰ আৰ্বানা-শ্যেমপেইনস্থিত ইলিনয় বিশ্ববিদ্যালয়ত ৰামানুজনৰ জন্ম শতবাৰ্ষিকী সন্মিলন এখনি আয়োজিত হৈছিল। সেই আন্তঃৰাষ্ট্ৰীয় সন্মিলনখনত ২ জুন তাৰিখে ফ্ৰিমেন ডাইছনে এই বিখ্যাত বক্তৃতাটো প্ৰদান কৰে। তাত্ত্বিক পদাৰ্থবিজ্ঞানী, গণিতজ্ঞ ফ্ৰিমেন ডাইছন তেতিয়া আছিল প্ৰিন্সটনৰ উচ্চতৰ অধ্যয়ন প্ৰতিষ্ঠান (Institute for Advanced Study) ৰ স্থায়ী অধ্যাপক।

১. এন্দ্ৰুজ

মোক ইয়ালৈ আনি ৰামানুজনৰ বাগিচাত যোৱা কিছু বছৰত ফুলি উঠা সকলো নতুন ফুল উপভোগ কৰাৰ সুযোগ দিয়া বাবে এই সন্মিলনৰ আয়োজকসকলৰ প্ৰতি, আৰু বিশেষকৈ ব্ৰুচ বাৰ্ণ্ট আৰু জৰ্জ এন্দ্ৰুজৰ প্ৰতি মই কৃতজ্ঞ। জৰ্জ এন্দ্ৰুজ এতিয়া মুখ্য মালী আৰু তেওঁ এক মহৎ কাম কৰি আছে। যদি মই ক'ব পাৰোঁ, তেন্তে তেওঁ পূৰ্বৰ মুখ্য মালী জৰ্জ ৱাটছনতকৈ ভাল কাম কৰি আছে। ১৯৩০-অৰ দশকত ৱাটছন মুখ্য মালী আছিল আৰু ৰামানুজনৰ ধাৰণাসমূহ, বিশেষকৈ একক মডুলি আৰু মক থেটা-ফলনৰ তত্ত্বসমূহ বিকশিত আৰু স্পষ্ট কৰাৰ বাবে কঠোৰ পৰিশ্ৰম কৰিছিল [১]। কিন্তু ৱাটছন আছিল সেই ধৰণৰ মালী যিয়ে মানৱ দৰ্শনাৰ্থীক ফুলৰ পৰা যিমান পাৰি আঁতৰত ৰাখিবলৈ ভাল পাইছিল। তেওঁ প্ৰ'জাৰ্পাইন দেৱীৰ দৰে নিজৰ বাৰীৰ প্ৰৱেশদ্বাৰত থিয় হৈ আছিল। ৱাটছনে তেওঁৰ মক থেটা-ফলন সম্পৰ্কীয় বিখ্যাত বক্তৃতাৰ [২] শেষত উদ্ধৃত কৰা ছুইনবাৰ্নৰ কবিতাটোত প্ৰ'জাৰ্পাইন তেওঁৰ বাগিচাৰ প্ৰৱেশদ্বাৰত থিয় হৈ আছে:

> "Pale, beyond porch and portal,
> Crowned with calm leaves, she stands
> Who gathers all things mortal
> With cold immortal hands."

ৱাটছন তেনেকুৱাই আছিল। যেতিয়া বাগিচাখনৰ মালিকীস্বত্ব ৱাটছনৰ অধীনত আছিল সেইকেইটা বছৰতে মোৰ ভাল বন্ধু অলিভাৰ এটকিনৰ ৰামানুজনৰ আৱিষ্কাৰসমূহ সম্পৰ্কত কাম কৰাৰ দুৰ্ভাগ্য হৈছিল। এটকিনে বিভাজনৰ বহুতো নতুন সৰ্বসম বৈশিষ্ট্য আৱিষ্কাৰ আৰু প্ৰমাণ কৰিছিল, আৰু ৱাটছনৰ কামৰ সম্প্ৰসাৰণ কৰি আগুৱাই নিছিল [৩]। এটকিনে শেহতীয়া অগ্ৰগতিৰ বিষয়ে জনাই, আৰু সহায় আৰু পৰামৰ্শ বিচাৰি ৱাটছনলৈ চিঠি লিখিছিল। ১৯৬৫

চনত যেতিয়া ৱাটছনৰ মৃত্যু হ'ল, তেতিয়া এটকিনে মোলৈ লিখিছিল, "মই আশা কৰিছোঁ যে আপুনি ৱাটছনৰ মৃত্যুৰ খবৰ পাইছে। গতিকে তেওঁৰ সৈতে মোৰ সম্পৰ্কত যতি পৰিছে। এতিয়ালৈকে তেওঁৰ সৈতে চিঠি বিনিময়ৰ চূড়ান্ত হিচাপ: বিশ-শূন্য।"

জৰ্জ এন্দ্ৰুজৰ কথা বেলেগ। তেওঁ প্ৰ'জাৰ্পাইনৰ দৰে নহয়, যিয়ে চেঁচা অমৰ হাতেৰে মৰ্ত্যৰ বস্তুবোৰ গোটাই লয়। তেওঁ চিঠিৰ উত্তৰ দিয়ে। আনকি তেওঁ নিজৰ বাগানত কোনোবাই ফুলবোৰ ভৰিৰে গচকি থকা দেখিবলৈ ভাল পায়। তেওঁক দেখা কৰিবলৈ অহা যিকোনো ব্যক্তিক তেওঁ সহায় আৰু উৎসাহ আগবঢ়ায়, সেয়া মোৰ দৰে কোনো বৃদ্ধ অধ্যাপকেই হওক বা কুমলীয়া ছাত্ৰই হওক। ফলস্বৰূপে বাগিচাখন এতিয়া পূৰ্বে কাহানিও নোহোৱা ধৰণে ফুলি উঠিছে আৰু বাঢ়িবলৈ লৈছে। জৰ্জ এন্দ্ৰুজে ৰামানুজনৰ বিখ্যাত হেৰোৱা টোকাবহীখন বিচাৰি উলিয়াই বাগিচাৰ ভূখণ্ডও বৃদ্ধি কৰিছিল, যিখন বহী ৱাটছনৰ হাতত ত্ৰিশ বছৰ ধৰি আছিল যদিও তেওঁ সম্ভৱতঃ কোনোদিনে পৰীক্ষা কৰি চোৱা নাছিল। এন্দ্ৰুজে প্ৰথমবাৰৰ বাবে টোকাবহীখন পৰীক্ষা কৰাই নহয়, তেওঁ ইয়াত থকা ৰত্নভাণ্ডাৰ সম্পৰ্কে ব্যাখ্যা কৰিছিল আৰু সকলোৰে চাব পৰাকৈ প্ৰদৰ্শন কৰিছিল [৪]।

২. হাৰ্ডি

মেক কাকে কৈছিল, "On revient toujours à ses anciens amours," "আমি সদায় আমাৰ পুৰণি প্ৰেমবোৰলৈ উভতি আহোঁ।" গতিকে এতিয়া জৰ্জ এন্দ্ৰুজৰ কৃপাত মই ৰামানুজনৰ গণিতৰ সৈতে থকা মোৰ পুৰণি প্ৰেমলৈ ঘূৰি আহিছোঁ। মোৰ এই প্ৰেম ৪৮ বছৰ আগতে আৰম্ভ হৈছিল, যেতিয়া মই ইংলেণ্ডত হাইস্কুলৰ দ্বিতীয় বৰ্ষত পঢ়ি আছিলোঁ। মই স্কুলৰ গণিতৰ পুৰস্কাৰ এটা লাভ কৰিছিলোঁ আৰু নিয়ম অনুসৰি পুৰস্কাৰ হিচাপে মই বিচৰা যিকোনো এখন কিতাপ বাছি ল'বলৈ দিয়া হৈছিল। মই হাৰ্ডি আৰু ৰাইটৰ 'এন ইণ্ট্ৰ'ডাকচন টু দ্য থিয়ৰী অৱ নাম্বাৰছ্'খন বাছি লৈছিলোঁ, যিখনৰ প্ৰথম সংস্কৰণ সেইটো বছৰতে প্ৰকাশ পাইছিল [৫]। প্ৰাথমিক পৰ্যায়ত প্ৰকৃত গণিতৰ সোৱাদ ল'ব বিচৰা কিশোৰ-কিশোৰীৰ বাবে এইখন এখন উত্তম গ্ৰন্থ আছিল, আৰু এতিয়াও হয়। স্পষ্ট চিন্তা আৰু সজীৱ বৰ্ণনাৰ ই এক উৎকৃষ্ট নিদৰ্শন। কেইবছৰমানৰ পাছত মই কেম্ব্ৰিজত হাৰ্ডিক চিনি পালোঁ আৰু সুধিলোঁ যে সেই বিস্ময়কৰ কিতাপখন লিখিবলৈ ইমান সময় আৰু কষ্ট কিয় খৰচ কৰিলে, যিখিনি সময়ত তেওঁ হয়তো একনিষ্ঠভাৱে গণিত-চৰ্চা কৰি থাকিব পাৰিলেহেঁতেন। তেওঁ উত্তৰ দিছিল, "যুৱসকলে উপপাদ্য প্ৰমাণ কৰা উচিত, বুঢ়াসকলে কিতাপ লিখা উচিত।" তাৰ পাছত তেওঁ ৰ'গোচিনস্কিৰ সৈতে লিখা তেওঁৰ শেষৰখন কিতাপ 'কেম্ব্ৰিজ ট্ৰেক্ট অন ফুৰিয়েৰ ছিৰিজ'ৰ বাবে কঠোৰ শ্ৰম কৰিছিল [৬]। এতিয়া মোৰ বয়সো তেওঁৰ তেতিয়াৰ বয়সৰ সমানেই, আৰু মই তেওঁৰ সেই ভাল আদৰ্শটো অনুসৰণ কৰি আছোঁ।

হাৰ্ডি আৰু ৰাইটৰ যিটো অধ্যায় মই আটাইতকৈ ভাল পাইছিলোঁ, সেইটো আছিল ১৯ নং অধ্যায়। অধ্যায়টোৰ শিৰোনাম আছিল 'Partitions'। এইটো এটা প্ৰকাণ্ড অধ্যায় আৰু ইয়াত ৰ'জাৰ্চ-ৰামানুজন অভেদৰ সম্পূৰ্ণ আলোচনা আৰু প্ৰমাণ সন্নিবিষ্ট কৰা হৈছে। মোৰ বাবে আৰু অধিক ৰোমাঞ্চকৰ আছিল ৰামানুজনে আৱিষ্কাৰ কৰা বিভাজনৰ সৰ্বসমতাৰ বৈশিষ্ট্যসমূহ:

$$p(৫m + ৪) \equiv ০ \pmod{৫}, \tag{১}$$

$$p(৭m + ৫) \equiv ০ \pmod{৭}, \tag{২}$$

$$p(১১m + ৬) \equiv ০ \pmod{১১}. \tag{৩}$$

হাৰ্ডি আৰু ৰাইটে (১) আৰু (২) ৰ বাবে সুন্দৰ পৰিপাটি প্ৰমাণ আগবঢ়াইছে, কিন্তু (৩) ক "অধিক কঠিন" বুলি মন্তব্য আগবঢ়াই একাষৰীয়া কৰি থৈছে। (৩) ৰ নোহোৱা প্ৰমাণটো আগবঢ়াবলৈ মই বহু চেষ্টা কৰিলোঁ, কিন্তু সফল নহ'লোঁ। (৩) ৰ প্ৰথম প্ৰকৃত প্ৰাথমিক প্ৰমাণ পদাৰ্থবিজ্ঞানী ৰিনকুইষ্টে ৩০ বছৰ পাছত বিচাৰি পাইছিল [৭]। ৰিনকুইষ্টৰ প্ৰমাণটো, ঘটনাক্ৰমে, এটা অভেদৰ ভিত্তিত কৰা হৈছিল যিটো লী বীজগণিত $B_২$ ৰ সৈতে জড়িত মেকড'নাল্ড অভেদসমূহৰ ভিতৰত এটা বুলি প্ৰমাণিত হৈছিল। কিন্তু সেইটো এটা বেলেগ কাহিনী।

হাইস্কুলত পঢ়ি থাকোঁতে মোৰ মনলৈ আহিল যে ৰামানুজনৰ (১), (২) আৰু (৩) সৰ্বসমতাই এটা প্ৰশ্ন উত্থাপন কৰে যাৰ উত্তৰ প্ৰমাণকেইটাই নিদিয়ে। উদাহৰণস্বৰূপ, সৰ্বসমতা (১) এ কয় যে $(৫m+৪)$ ৰ বিভাজনসমূহ পাঁচটা শ্ৰেণীত বিভক্ত কৰিব পৰা হ'ব লাগিব আৰু প্ৰতিটো শ্ৰেণীত একে সংখ্যক বিভাজন থাকিব লাগিব। প্ৰমাণটোৱে আপোনাক কয় যে বিভাজনসমূহক পাঁচটা সমান শ্ৰেণীত বিভক্ত কৰা সম্ভৱ, কিন্তু কেনেকৈ কৰিব লাগে সেইটো নকয়। গতিকে মই সেইটো কৰাৰ এটা উপায় বিচাৰিবলৈ আৰম্ভ কৰিলোঁ। মই এটা সুনিৰ্দিষ্ট চৰ্ত পাব বিচাৰিছিলোঁ, যাতে আপুনি $(৫m+৪)$ ৰ যিকোনো বিভাজন এটা চাব পাৰে আৰু চৰ্তটো ব্যৱহাৰ কৰি ক'ব পাৰে যে ই পাঁচটা সমান শ্ৰেণীৰ ভিতৰত কোনটো শ্ৰেণীৰ অন্তৰ্গত। তিনি বছৰ পাছত কেম্ব্ৰিজৰ দ্বিতীয় বৰ্ষত পঢ়ি থাকোঁতে মই সেইটো পাইছিলোঁ। চৰ্তটো আচলতে সহজ আছিল। প্ৰতিটো বিভাজনৰ বাবে আপুনি এটা 'ৰেংক' সংজ্ঞায়িত কৰক। এটা বিভাজনৰ ৰেংক হৈছে সৰ্বোচ্চ অংশটোৰ পৰা অংশৰ সংখ্যা বিয়োগ কৰি পোৱা মান। তাৰ পাছত $j=১,২,৩,৪,৫$ অৰ বাবে আপুনি $C_j(n)$ শ্ৰেণী সংজ্ঞায়িত কৰক। ই হৈছে n অৰ বিভাজনসমূহৰ একোটা শ্ৰেণী, যিসমূহৰ ৰেংক ৫ মডুলোত j ৰ সৈতে সৰ্বসম। সেইটোৱেই আছিল কিটিপ। দেখা গ'ল যে, যেতিয়া $n=৫m+৪$, তেতিয়া $C_১, C_২, C_৩, C_৪, C_৫$ শ্ৰেণীকেইটা সমান। মই এইটো কঠিন পদ্ধতিৰে পৰীক্ষা কৰিলোঁ, সকলো বিভাজন লিখি, $n=৪$, $n=৯$ আৰু $n=১৪$ ৰ বাবে সিহঁতৰ ৰেংক অনুসৰি পাঁচটা শ্ৰেণীত বিভক্ত কৰি লৈছিলোঁ। $n=১৪$ ৰ ক্ষেত্ৰত আপোনাৰ ১৩৫ টা বিভাজন আছে, আৰু তাত পাঁচটা শ্ৰেণীৰ প্ৰতিটোতে ঠিক ২৭ টাকৈ বিভাজন আছে। মই সিদ্ধান্ত লৈছিলোঁ যে দুৰ্ঘটনাক্ৰমে এনেকুৱা হোৱাৰ সম্ভাৱনা নগণ্য। গতিকে মই চৰ্তটো বিচাৰি পাইছিলোঁ। সেইটো আছিল এটা উল্লেখনীয় মুহূৰ্ত। মই ৰামানুজনক দুটা কথাৰ বাবে ধন্যবাদ দিছিলোঁ, বিভাজনৰ সৰ্বসম বৈশিষ্ট্য আৱিষ্কাৰ কৰাৰ বাবে আৰু সিহঁতক সমান শ্ৰেণীত বিভক্ত কৰাৰ চৰ্ত আৱিষ্কাৰ নকৰাৰ বাবে। সেইটোৱেই আছিল ৰামানুজনৰ আচৰিত কথা। তেওঁ ইমানবোৰ আৱিষ্কাৰ কৰিলে, আৰু তাৰ পাছতো তেওঁ আন মানুহে আৱিষ্কাৰ কৰিবলৈ তেওঁৰ বাগিচাত আৰু বহুত এৰি থৈ গ'ল। সেই সুখৰ দিনটোৰ পৰা পৰৱৰ্তী ৪৪ বছৰত মই মাজে মাজে ৰামানুজনৰ বাগিচালৈ ঘূৰি আহিছোঁ। প্ৰতিবাৰেই উভতি আহোঁতে মই সতেজ ফুল ফুলি থকা দেখিবলৈ পাওঁ।

৫ এৰে বিভাজ্যতাৰ চৰ্তটো পৰীক্ষা কৰাৰ লগে লগে মই ৭ আৰু ১১ ৰে বিভাজ্যতাৰ প্ৰথম উদাহৰণকেইটা পৰীক্ষা কৰি চাইছিলোঁ। ৭ অৰ বাবে একেটা কৌশলেই কাম কৰিলে। মই ৫ আৰু ১২ ৰ বিভাজনসমূহ লিখিলোঁ আৰু সিহঁতৰ ৰেংক অনুসৰি ৭ টা শ্ৰেণীত ভাগ কৰিলোঁ (মডুলো ৭)। ১২ ৰ ৭৭ টা বিভাজন প্ৰতিটো শ্ৰেণীত ১১ টাকৈ থকা ৭ টা শ্ৰেণীত বিভক্ত হৈছিল। এইটোও দুৰ্ঘটনা হ'ব নোৱাৰে। গতিকে $p(৭m+৫)$ অক ৭ ৰে বিভাজ্যতাৰ বাবে ৰেংকৰ চৰ্তটো বৈধ আছিল। কিন্তু $p(১১m+৬)$ ক ১১ ৰে বিভাজ্যতাৰ বাবে কৌশলটোৱে কাম নকৰে। ই ইতিমধ্যে প্ৰথম প্ৰয়াসত বিফল হয়। ৬ ৰ $৩+৩$ আৰু $৪+১+১$ বিভাজন দুটাৰে ৰেংক ১, আৰু ৪ ৰ সৈতে সৰ্বসম ৰেংক থকা ৬ ৰ কোনো বিভাজন নাই (মডুলো ১১)। মই বিভাজনৰ বিভাজ্যতাৰ (মডুলো ১১) এটা চৰ্ত বিচাৰি বহুতো সুখী ঘণ্টা পাৰ কৰিলোঁ। মই কেতিয়াও তেনে এটা চৰ্ত বিচাৰি নাপালোঁ। চল্লিশ বছৰ পাছত ফ্ৰেংক গাৰ্ভানে [৮] এই চৰ্তটো বিচাৰি পাইছিল, যি আজি আপোনালোকক এই বিষয়ে ক'বলৈ ইয়াত উপস্থিত আছে। ফ্ৰেংক গাৰ্ভানৰ আৱিষ্কাৰৰ বিষয়েও মোৰ কিবা এটা ক'বলগীয়া থাকিব। কিন্তু এই মুহূৰ্তৰ বাবে মই ১৯৪২ চনলৈ উভতি আহিছোঁ।

মই বিভাজনসমূহৰ ৰেংক অনুসৰি (মডুলো ৫) আৰু (মডুলো ৭) সমবিভাজন প্ৰমাণ কৰিব বিচাৰিছিলোঁ, কিন্তু মই কাহানিও প্ৰমাণ এটা বিচাৰি উলিয়াবলৈ সফল নহ'লোঁ। দহ বছৰ পাছত অলিভাৰ এটকিন আৰু পিটাৰ ছুইনাৰ্টন-ডায়াৰে ইয়াৰ প্ৰমাণ বিচাৰি পাইছিল [৯]। পিটাৰ এতিয়া এগৰাকী বেৰ'নেট, আৰু ব্ৰিটিছ সাম্ৰাজ্যৰ নাইটৰ লগতে এগৰাকী বিখ্যাত গণিতজ্ঞ। অলিভাৰ আৰু পিটাৰে যি প্ৰমাণ প্ৰস্তুত কৰিছিল সেয়া শ্ৰেষ্ঠ ৰামানুজন পৰম্পৰাত এক মহৎ শিল্পকৰ্ম। তেওঁলোকৰ বিশ্লেষণত ৰামানুজনৰ প্ৰিয় বহুতো মক থেটা-ফলনৰ আৱিৰ্ভাৱ ঘটিছে। ফ্ৰেংক গাৰ্ভানে ত্ৰিশ বছৰৰ পাছত লক্ষ্য কৰা মতে [৮], এটকিন আৰু ছুইনাৰ্টন-ডায়াৰে তেওঁলোকৰ প্ৰমাণৰ উদ্দেশ্যত, **১৯৫৩** চনত ৰামানুজনৰ হেৰোৱা টোকাবহীত পোত খাই থকা কেইবাটাও আকৰ্ষণীয় মক-থেটা-ফলন অভেদ পুনৰ আৱিষ্কাৰ কৰিছিল। বাৰ্মিংহামৰ ৱাটছনৰ কোঠাৰ মজিয়াখন ঢাকি ৰখা ধ্বংসাৱশেষৰ গভীৰ তৰপটোত টোকাবহীখন ৰূপকীয় অৰ্থত নহয়, আক্ষৰিকভাবেই পোত খাই আছিল [১০]।

১৯৪২ চনত মই যিখিনি কৰিছিলোঁ, সেয়া আছিল প্ৰদত্ত ৰেংকৰ বিভাজনসমূহৰ বাবে এটা সুবিধাজনক সৃষ্টক ফলন বিচাৰি উলিয়াবলৈ সক্ষম হৈছিলোঁ। ধৰা হ'ল, m ৰেংকৰ n অৰ বিভাজনৰ সংখ্যা $P_m(n)$. তেতিয়া সৃষ্টক ফলনটো হ'ল

$$\begin{aligned}P_m(x) &= \sum_{n=১}^{\infty} p_m(n)x^n \\ &= P(x)\sum_{n=১}^{\infty}(-১)^{n-১}\left(x^{\frac{১}{২}n(৩n-১)} - x^{\frac{১}{২}n(৩n+১)}\right)x^{|m|n},\end{aligned} \tag{৪}$$

য'ত

$$P(x) = \sum_{n=০}^{\infty} p(n)x^n = \left[\sum_{-\infty}^{\infty}(-১)^n x^{\frac{১}{২}n(৩n-১)}\right]^{-১}. \tag{৫}$$

(৫) অৰ সোঁফালে থকা ৰাশিটো হৈছে বিভাজন ফলনৰ বাবে অইলাৰৰ ধ্ৰুপদী সূত্ৰ, যিটো হাৰ্ডি আৰু ৰাইটৰ **১৯** নং অধ্যায়ত পোৱা ৰত্নবোৰৰ অন্যতম [৫]। এটা নিৰ্দিষ্ট ৰেংকৰ বিভাজনৰ বাবে সৃষ্টক ফলন (৪) টো সমানেই আকৰ্ষণীয় হোৱাটো এটা অপ্ৰত্যাশিত লাভ আছিল। **১৯৪২** চনত মই (৪) ক প্ৰমাণ কৰিব পাৰিলোঁ, কিন্তু বিন্যাস তত্ত্বৰ ভিত্তিত ইয়াক কেনেকৈ অৰ্থ দিব পাৰি সেইটো ভাবি নাপালোঁ। মই কেৱল সাংখ্যিক গণনাৰ বাবে ব্যৱহাৰিক আহিলা হিচাপে (৪) ব্যৱহাৰ কৰিলোঁ।

ধৰা হ'ল, $P_{q,m}(n)$ হৈছে n অৰ বিভাজনৰ সংখ্যা, যাৰ ৰেংক মডুলো q ত m অৰ সৰ্বসম। তেন্তে (৪) এ আমাক সৃষ্টক ফলনটো দিয়ে, যিটো $০ \leq m < q$ ৰ বাবে বৈধ,

$$\begin{aligned}P_{q,m}(x) &= \sum_{n=১}^{\infty} p_{q,m}(n)x^n \\ &= P(x)\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'(-১)^{n-১}x^{\frac{১}{২}n(৩n-১)+mn}\left(\frac{১-x^n}{১-x^{qm}}\right),\end{aligned} \tag{৬}$$

য'ত, ′ (prime) অৰ অৰ্থ হ'ল যোগফলৰ পৰা $n = ০$ পদটো বাদ দিয়া হৈছে। ইলেক্ট্ৰনিক কম্পিউটাৰ অহাৰ

আগৰ দিনবোৰতো (৬) ব্যৱহাৰ কৰি দ্ৰুতভাবে এনেধৰণৰ পাৰ্থক্যবোৰ n অৰ মান ১০০ পৰ্যন্ত গণনা কৰাটো সহজ আছিল:

$$a = p_{৭,০}(n) - p_{৭,৩}(n), b = p_{৭,১}(n) - p_{৭,৩}(n), c = p_{৭,২}(n) - p_{৭,৩}(n). \qquad (৭)$$

এনেধৰণৰ গণনাৰ সুন্দৰ কথাটো হ'ল ই আপোনাক এটা স্বয়ংক্ৰিয় ভুল-সংশোধন এলগৰিদম দিয়ে। (৫) আৰু (৬) অনুসৰি দুটা গুণোত্তৰ শ্ৰেণীৰ ভগ্নাংশ লৈ a, b আৰু c সহগকেইটা পোৱা যায়। হৰৰ শ্ৰেণীটোৰ মাত্ৰ $(+১)$ আৰু (-১) সহগ থাকে, ফলত হৰণৰ প্ৰক্ৰিয়াটো সহজ আৰু দ্ৰুত হয়। উত্তৰ হিচাপে পোৱা ভগ্নাংশটোৱে a, b, c সহগকেইটা দিয়ে, যিবোৰৰ মান আপুনি ভুল নকৰালৈকে সদায় সৰু থাকে। $n =$ ১০০ লৈকে a ৰ আটাইতকৈ ডাঙৰ মান হৈছে $a =$ ৩, যিটো $n =$ ৯৯ ত পোৱা যায়। কিন্তু হৰণটোত সামান্যতম ভুল কৰাৰ লগে লগে a ৰ মানবোৰ দ্ৰুতগতিত $p(n)$ অৰ দৰে অতিমাত্ৰা বৃদ্ধি হয়। যেতিয়া আপুনি মানবোৰৰ অতিমাত্ৰা বৃদ্ধি হোৱা দেখিব, তেতিয়া আপুনি কেৱল $p(n)$ অৰ মানৰ তালিকা এখনলৈ এবাৰ চকু ফুৰাব লাগিব যাতে ভুলটো ক'ত আছিল সেইটো সঠিকভাবে চাব পাৰে। গতিকে আপুনি প্ৰতিটো ভুল আৱিৰ্ভাৰ হোৱাৰ লগে লগে আনন্দৰে সংশোধন কৰিব পাৰে, আৰু আপুনি শেষত a, b আৰু c ৰ মানৰ এখন তালিকা পাব যিখন নিঃসন্দেহে শুদ্ধ হ'ব। এই বিশেষ ভুল-সংশোধন এলগৰিদমটো এতিয়া অৱশ্যেই অপ্ৰয়োজনীয় কাৰণ আমাৰ হাতত নিৰ্ভুল কম্পিউটাৰ আৰু SCRATCHPAD-অৰ দৰে প্ৰগ্ৰেম আছে যাতে গুণোত্তৰ-শ্ৰেণীক স্বয়ংক্ৰিয়ভাবে সালসলনি কৰিব পাৰি। তথাপি এই ধৰণৰ ভুল-সংশোধন এলগৰিদম এটা নিৰ্মাণ কৰাটো এতিয়াও সাংখ্যিক গণনাত কেতিয়াবা উপযোগী হ'ব পাৰে। কম্পিউটাৰটো নিৰ্ভুল হ'লেও, ইনপুট তথ্যত ভুল থাকিব পাৰে। ভুল-সংশোধন এলগৰিদমৰ অপৰিহাৰ্য ধাৰণাটো হ'ল গণনাক সাংখ্যিকভাবে অস্থিৰ কৰি তোলা, যাতে প্ৰতিটো ভুলে দ্ৰুতগতিত অতিমাত্ৰা বৰ্ধিত আউটপুট হিচাপে আত্মপ্ৰকাশ কৰে। এনে এলগৰিদমে কেৱল এনে পৰিস্থিতিতহে কাম কৰিব পাৰে য'ত আমি আগতীয়াকৈ জানো যে সঠিক আউটপুট সৰু বা মসৃণ হ'ব লাগিব। ৰামানুজনৰ কৃপাত, মই নিজকে এনে এটা পৰিস্থিতিত পাইছিলোঁ য'ত আউটপুট সৰু হোৱাৰ নিশ্চয়তা আছিল।

$n =$ ১00 লৈকে a, b আৰু c অন্তৰকেইটা গণনা কৰাৰ পাছত মই নিশ্চিতভাবে জানিছিলোঁ যে যেতিয়াই $n \equiv$ ৫ (mod ৭) হয়, তেতিয়া এই গোটেইবোৰ শূন্য হ'ব। আচলতে মই তাতকৈও বেছি জানিছিলোঁ। দেখা গ'ল যে

$$a = ০ \text{ যেতিয়া } n \equiv ২, ৪, ৫ \pmod{৭}, \qquad (৮)$$

$$b = ০ \text{ যেতিয়া } n \equiv ১, ৩, ৪, ৫ \pmod{৭}, \qquad (৯)$$

$$c = ০ \text{ যেতিয়া } n \equiv ০, ১, ৫ \pmod{৭}. \qquad (১০)$$

আৰু একেধৰণৰে সমতা তলৰ দুটা অন্তৰৰ বাবে প্ৰযোজ্য হয়,

$$d = p_{৫,০}(n) - p_{৫,২}(n), e = p_{৫,১}(n) - p_{৫,২}(n).$$

জৰ্জ এন্দ্ৰুজ আৰু ফ্ৰেংক গাৰ্ভানে আমাক কোৱাৰ দৰে [৩২], d আৰু e অন্তৰ দুটা ৰামানুজনে আৱিষ্কাৰ কৰা পঞ্চম মাত্ৰাৰ মক থেটা-ফলনৰ দুটা পৰিয়ালৰ সৈতে ওতঃপ্ৰোতভাবে জড়িত। ৰামানুজনে কেৱল তিনিটা সপ্তম মাত্ৰাৰ মক থেটা-ফলন পাইছিল, যিবোৰ তেওঁ হাৰ্ডিলৈ লিখা শেষৰখন চিঠিত কোৱাৰ দৰে ইটোৱে সিটোৰ সৈতে সম্পৰ্কিত নহয়। সম্ভৱতঃ a, b, c অন্তৰৰ সৈতে জড়িত সপ্তম মাত্ৰাৰ মক থেটা ফলনৰ তিনিটা পৰিয়াল আছে যিকেইটা আৱিষ্কাৰ হ'বলৈ বাকী, যিদৰে পঞ্চম মাত্ৰাৰ ফলন d আৰু e ৰ সৈতে জড়িত। "আমি ৰামানুজনৰ শেষৰটো অসাধাৰণ সৃষ্টি বুজিবলৈ আৰম্ভ কৰিছোঁ মাত্ৰ: মক থেটা-ফলনসমূহ।" এন্দ্ৰুজৰ পৰা উদ্ধৃত [৩০]।

(৮), (৯), (১০) সমীকৰণকেইটা নিঃসন্দেহে সত্য আছিল, কিন্তু ১৯৪২ চনত সেইবোৰ কেনেকৈ প্ৰমাণ কৰিব লাগে মোৰ কোনো ধাৰণা নাছিল। শেষত মই সেইবোৰ প্ৰমাণ কৰাৰ চেষ্টা এৰি দিলোঁ আৰু আমাৰ বিদ্যাৰ্থী আলোচনী 'ইউৰেকা'ত অনুমান হিচাপে প্ৰকাশ কৰিলোঁ [১১]। যিহেতু মোৰ গৱেষণা-পত্ৰখনৰ শেষত আধা পৃষ্ঠা খালী আছিল, সেয়ে তেওঁলোকে মোৰ বন্ধু এলিছন ফেলকনাৰৰ এটা কবিতা প্ৰকাশ কৰিছিল যি এগৰাকী কবিৰ লগতে গণিতজ্ঞও আছিল [১২]। গণিতৰ সৈতে অলপ কবিতা মিহলি হোৱাটো মোৰ ভাল লাগিছিল। আজিকালি যিহেতু আলোচনীখন বিচাৰি পোৱাটো কঠিন, সেয়ে কবিতাটো পাহৰণিৰ গৰ্ভৰ পৰা বচাবলৈ এইটো সুযোগকে ল'লোঁ। এইটোৱেই সেই কবিতাটো:

Short Vision, by A. C. Falconer.
Thought is the only way which leads to life.
All else is hollow spheres
Reflecting back
In heavy imitation
And blurred degeneration
A senseless image of our world of thought.
Man thinks he is the thought which gives him life.
He binds a sheaf and claims it as himself.
He is a ring through which pass swinging ropes
Which merely move a little as he slips.
The Ropes are Thought.
The Space is Time.
Could he but see, then he might climb.

৩. বেইলি

কিন্তু মই মূল কথা এৰি অবান্তৰ কথা কৈ আছোঁ। ৰামানুজনৰ বাগিচালৈ মোৰ পৰৱৰ্তী ভ্ৰমণ আছিল ১৯৪৩ চনত। সেই সময়ত মই কেম্ব্ৰিজ এৰি ৰয়েল এয়াৰ ফ'ৰ্চত পৰিসংখ্যাবিদ হিচাপে কাম কৰি আছিলোঁ। হাৰ্ডি তেতিয়া লণ্ডন মেথমেটিকেল ছ'চাইটিৰ সচিব আছিল, গতিকে তেওঁ ছ'চাইটিৰ জাৰ্নেলখনৰ সম্পাদক হিচাপেও কাম কৰিছিল। ইংলেণ্ডত গণিত তেতিয়া এক নিম্নগামী পৰ্যায়ত আছিল। সকলো যুৱ গণিতজ্ঞই কিবা নহয় কিবা প্ৰকাৰে যুদ্ধৰ লগত জড়িত আছিল। তেওঁলোকৰ অধিকাংশই ব্লেট্‌শ্লিৰ ক্ৰিপ্টোগ্ৰাফিক প্ৰতিষ্ঠানটোত অন্তৰ্ধান হৈছিল, যিটো এটা কৃষ্ণগহ্বৰৰ দৰে আছিল। মানুহবোৰ ব্লেট্‌শ্লিলৈ গৈছিল, আৰু কাহানিও দেখা পোৱা নগৈছিল। ব্লেট্‌শ্লিত নথকা কেইজনমানৰ ভিতৰত ময়ো আছিলোঁ। মই তুলনামূলকভাৱে লগ কৰিব পৰা পৰিৱেশত আছিলোঁ, আৰু হাৰ্ডিয়ে জানিছিল যে ৰ'জাৰ্চ-ৰামানুজন অভেদৰ প্ৰতি মোৰ আগ্ৰহ আছে। সেয়ে পৰ্যালোচনা কৰিবলৈ তেওঁ মোলৈ এখন গৱেষণা-পত্ৰ পঠিয়াইছিল। ডব্লিউ. এন. বেইলিৰ এই গৱেষণা-পত্ৰখনত ৰ'জাৰ্চ-ৰামানুজনৰ দৰে অভেদ উলিওৱাৰ এক নতুন পদ্ধতি সন্নিবিষ্ট আছিল। মই হাৰ্ডিৰ বাবে এটা প্ৰতিবেদন লিখিলোঁ, কিছুমান সংশোধনীৰ পৰামৰ্শ আগবঢ়াই প্ৰকাশৰ বাবে অনুমোদন কৰিলোঁ। হাৰ্ডিয়ে দেখিলে যে ৰ'জাৰ্চ-ৰামানুজন অভেদৰ প্ৰতি গুৰুতৰ আগ্ৰহ থকা ইংলেণ্ডৰ মাত্ৰ দুজন ব্যক্তিয়ে ইজনে সিজনৰ পৰা বিচ্ছিন্ন হৈ থকাটো এক অস্বাভাৱিক কথা। গতিকে তেওঁ সুবিবেচনাৰে

ৰেফাৰীৰ নাম প্ৰকাশ নকৰাৰ নিয়ম ভংগ কৰিলে। তেওঁ মোৰ নাম লিখি বেইলিলৈ মোৰ প্ৰতিবেদনটো পঠিয়াইছিল। বেইলিয়ে লগে লগে মোলৈ সহাঁৰি পঠিয়ালে, আৰু আমি অভেদৰ আদান-প্ৰদান অব্যাহত ৰাখিলোঁ। ইয়াৰ মাজতে বেইলিয়ে অভেদ নিৰ্ণয়ৰ বাবে তেওঁৰ চূড়ান্ত আৰু বহুত বেছি শক্তিশালী 'বেইলি যুগ্ম' পদ্ধতিটো উলিয়ালে [১৩]। যুদ্ধকালীন কাগজৰ নাটনিৰ বাবে মই পৰ্যালোচনা কৰা গৱেষণা-পত্ৰখন [১৪] ১৯৪৭ চনলৈকে ছপা ৰূপত প্ৰকাশ পোৱা নাছিল, আৰু 'Bailey Pair' গৱেষণা-পত্ৰখন [১৫] ১৯৪৯ চনলৈকে প্ৰকাশ পোৱা নাছিল। কিন্তু বেইলিৰ মহৎ কৰ্মটো ১৯৪৩-৪৪ চনৰ সেই শীতকালত কৰা হৈছিল, আৰু মই ভাগ্যৱান আছিলোঁ যে তেতিয়া তেওঁৰ কামসমূহত প্ৰতিক্ৰিয়া প্ৰকাশ কৰোঁতা হিচাপে কাম কৰিছিলোঁ। বেইলিক মই কেতিয়াও লগ পোৱা নাছিলোঁ। সেই মাহকেইটা তেওঁ মানচেষ্টাৰত আছিল, আৰু মই বাকিংহামশ্বেৰৰ এখন অৰণ্যৰ মাজত থকা ৰয়েল এয়াৰ ফ'ৰ্চ বোম্বাৰ কমাণ্ডৰ মুখ্য কাৰ্যালয়ত আছিলোঁ।

সেইটো বৰ দীঘলীয়া, কঠিন, বিষাদময় শীতকাল আছিল। মই বোম্বাৰ কমাণ্ডত প্ৰতি সপ্তাহে ষাঠি ঘণ্টা কাম কৰি আছিলোঁ। মই বিশ্লেষণ কৰিবলগীয়া বোমাৰু বিমানৰ লোকচান ক্ৰমাগতভাৱে বাঢ়ি গৈ আছিল। যুদ্ধ অন্ত পৰাৰ কোনো ইংগিত নাছিল। সেই শীতকালৰ সন্ধিয়াবোৰত মই ৰামানুজনৰ বাগিচাত বিচৰণ কৰি, বেইলিৰ পৰা পাই থকা চিঠিবোৰ পঢ়ি, বেইলিৰ ধাৰণাবোৰৰ মাজেৰে কাম কৰি, নতুন নতুন ৰ'জাৰ্চ-ৰামানুজন অভেদ আৱিষ্কাৰ কৰি নিজকে প্ৰকৃতিস্থ কৰি ৰাখিলোঁ। ৰামানুজনে যিবোৰ ভাল পালেহেঁতেন, তেনেধৰণৰ মই বহুকেইটা অভেদ পাইছিলোঁ। মোৰ প্ৰিয় আছিল এইটো:

$$\sum_{n=০}^{\infty} x^{n^২+n} \frac{(১+x+x^২)(১+x^২+x^৪)\cdots(১+x^n+x^{২n})}{(১-x)(১-x^২)\cdots(১-x^{২n+১})} = \prod_{n=১}^{\infty} \frac{(১-x^{৯n})}{(১-x^n)}. \qquad (১১)$$

১৯৪৪ চনৰ মৃত্যু আৰু ধ্বংসলীলাৰ মাজতে ঠাণ্ডা অন্ধকাৰ সন্ধিয়াবোৰত এই সুন্দৰ অভেদবোৰ লিখি থাকোঁতে মই নিজকে ৰামানুজনৰ ওচৰ অনুভৱ কৰিছিলোঁ। ১৯১৭ চনৰ মৃত্যু আৰু সংহাৰৰ মাজত তেওঁ ইয়াতকৈও বেছি ধুনীয়া অভেদ লিখি আছিল।

৪. এটকিন

অৱশেষত যেতিয়া দ্বিতীয় বিশ্বযুদ্ধৰ অন্ত পৰিল, মই আমেৰিকালৈ আহি পদাৰ্থবিজ্ঞানী হোৱাৰ সিদ্ধান্ত ললোঁ। কিন্তু মই ৰামানুজনক পাহৰা নাছিলোঁ। আৰু অলিভাৰ এটকিনৰ সৈতে থকা মোৰ বন্ধুত্বৰ জৰিয়তে বিভাজনৰ সৰ্বসম বৈশিষ্ট্যৰ প্ৰতি থকা মোৰ আগ্ৰহ জীয়াই আছিল। এটকিন আৰু ছুইনাৰ্টন-ডায়াৰে (৮), (৯), (১০) অভেদকেইটাৰ বিৰুদ্ধে চলোৱা দীঘলীয়া সংগ্ৰামৰ সময়ত তেওঁ মোৰ সৈতে যোগাযোগ অব্যাহত ৰাখিছিল। তেওঁলোকৰ ১৯৫৩ চনৰ গৱেষণা-পত্ৰত লিপিবদ্ধ কৰা পূৰ্ণ বিজয়ৰ সৈতে এই সংগ্ৰামৰ সামৰণি পৰিছিল [৯]। পৰৱৰ্তী পোন্ধৰ বছৰ ধৰি এটকিনে জো লেহনাৰ আৰু মৰিছ নিউমেনৰ সৈতে মিলি মডুলাৰ ৰূপৰ তত্ত্বৰ গভীৰ অন্বেষণত নিমজ্জিত হৈছিল যাৰ পৰা বিভাজনৰ সৰ্বসম বৈশিষ্ট্যৰ উন্মেষ ঘটে। এটকিন দুটা বেলেগ বেলেগ ধৰণেৰে এজন পথ প্ৰদৰ্শক আছিল। গাণিতিক আৱিষ্কাৰৰ উদ্দেশ্যে ইলেক্ট্ৰনিক কম্পিউটাৰ সৃষ্টিশীলভাৱে ব্যৱহাৰ কৰা প্ৰথম ব্যক্তিসকলৰ ভিতৰত তেওঁ অন্যতম। চিল্টনৰ এটলাছ কম্পিউটাৰত তেওঁৰ সীমাহীন প্ৰৱেশ-সুচলতা আছিল, আৰু ইয়াৰ জৰিয়তে তেওঁ মডুলাৰ ৰূপৰ নতুন জগতখন অন্বেষণ কৰিছিল। তেওঁৰ অন্বেষণৰ পৰা মাজে সময়ে নতুন বিভাজন সৰ্বসমতাৰ দৰে বস্তুৰ

উন্মেষ ঘটিছিল [১৬], [১৭],

$$p(১১^৩ \cdot ১৩n + ২৩৭) \equiv ০ \pmod{১৩}, \quad (১২)$$

$$p(২৩^৩ \cdot ১৭n + ২৬২৩) \equiv ০ \pmod{১৭}. \quad (১৩)$$

প্ৰতিটো অখণ্ড সংখ্যাৰ স্বকীয়তাক লৈ থকা ৰামানুজনৰ সন্তোষৰ এটকিনো অংশীদাৰ আছিল। লিটল্‌উডে এবাৰ মন্তব্য কৰিছিল যে প্ৰতিটো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা ৰামানুজনৰ ব্যক্তিগত বন্ধুসকলৰ মাজৰ এজন। এটকিনৰো অখণ্ড সংখ্যাৰ সৈতে ব্যক্তিগত বন্ধুত্ব আছিল। (১৩) ৰ দৰে এক সৰ্বসমতা আৱিষ্কাৰৰ আশা কৰাৰ আগতে আপুনি ১৭ আৰু ২৩ অৰ ব্যক্তিগত বন্ধু হ'ব লাগিছিল। কিন্তু এটকিন অধিক গুৰুত্বপূৰ্ণ অৰ্থত এজন পথ প্ৰদৰ্শক আছিল। কেৱল সুন্দৰ পৰিপাটি অভেদৰ সংগ্ৰাহক হৈয়েই তেওঁ সন্তুষ্ট নাছিল। তেওঁৰ এক বৃহত্তৰ স্বপ্ন আছিল। তেওঁৰ স্বপ্ন আছিল মডুলাৰ ৰূপৰ গাণিতিক তত্ত্বৰ এক বৃহৎ একত্ৰীকৰণ, য'ত বিভাজনৰ সকলো জ্ঞাত আৰু অজ্ঞাত সৰ্বসম বৈশিষ্ট্য বিশেষ উদাহৰণ হিচাপে দেখা দিব। তেওঁৰ সৰ্বাত্মক একত্ৰীকৰণ এতিয়াও হোৱা নাই যদিও তেওঁ এটা ভাল আৰম্ভণি কৰিছিল। সংঘ-তত্ত্ব, ফলন-তত্ত্ব আৰু সংকাৰক-তত্ত্বৰ পৰা ধাৰণাসমূহক একত্ৰিত কৰি তেওঁ যিটো ভূখণ্ড অন্বেষণ কৰিছিল, সেয়া এতিয়া পৰৱৰ্তী প্ৰজন্মৰ অগ্ৰণীসকলৰ উপনিবেশিকৰণৰ বাবে মুকলি হৈছে। এটকিনে যি কৰি আহিছে সেয়া হৈছে ৰামানুজনৰ বাগিচা আৰু আধুনিক গণিতৰ বৃহৎ জগতখনৰ মাজত সংযোগ বিচাৰি উলিওৱা। বাগিচাখন ৱাটছনৰ সময়ৰ দৰে, চাৰিওফালে বেৰ থকা সৰু আশ্ৰয়যুক্ত কোণ এটা হ'ব নালাগে। এতিয়া এটকিন আৰু আনসকলৰ কৃপাত এইখন বেৰহীন, বহল বীথিকাৰ চৌদিশ খোলা থকা এখন বাগিচা। শেহতীয়াকৈ এটকিনে তেওঁৰ ছাত্ৰী মাৰ্গাৰেট মিলিংটন-এছৱৰ্থৰ মৃত্যুক লৈ লিখা এটা সংবাদে [১৮] বহল প্ৰাকৃতিক দৃশ্যৰ এক বিশেষভাবে স্পষ্ট ছবি আগবঢ়াইছে।

১৯৬৮ চনত এটকিনৰ সৈতে এই ডাঙৰ বিষয়সমূহৰ বিষয়ে আলোচনা কৰি থাকোঁতে মই পুনৰ এটা সৰু বিষয়ৰ সম্পৰ্কে চিন্তা কৰিবলৈ আৰম্ভ কৰিলোঁ– সৃষ্টক ফলনবোৰৰ বিন্যাস তাত্ত্বিক অৰ্থ (৪) যিটো মই ২৫ বছৰ আগতে এটা প্ৰদত্ত ৰেংকৰ বিভাজনৰ বাবে পাইছিলোঁ। দেখা গ'ল যে বিন্যাস তত্ত্বৰ এটা সৰল যুক্তিয়ে আমাক (৪) ক বুজাত সহায় কৰে, আৰু লগতে (৫) অৰ নতুন প্ৰমাণ দিয়ে [১৯]। মূল পদক্ষেপটো হৈছে বিভাজনসমূহক কেৱল ধনাত্মক অংশসমূহৰ পৰিৱৰ্তে অঋণাত্মক অংশসমূহেৰে বিবেচনা কৰা। এটা বিভাজনত যিকোনো সংখ্যক শূন্য অংশ হিচাপে থাকিব পাৰে। বিভাজনৰ ৰেংকক পূৰ্বৰ দৰেই, বৃহত্তম অংশৰ পৰা অংশৰ সংখ্যা বিয়োগ কৰি সংজ্ঞায়িত কৰা হয়। ধৰা হ'ল, $q_m(n)$ টো অঋণাত্মক অংশ লৈ গঠিত n অৰ m ৰেংকৰ বিভাজনৰ সংখ্যা। তেতিয়া $q_m(n)$ ৰ মানৰ তালিকাখনত দুটা পৃথক আৰু স্বতন্ত্ৰ প্ৰতিফলন সমমিতি থাকে, যিকেইটা হ'ল

$$q_m(n) + q_{১-m}(n) = p(n), \quad (১৪)$$

আৰু

$$q_m(n) = q_{-২-m}(n - m - ১). \quad (১৫)$$

এই দুয়োটা সমমিতি বিভাজনৰ পুৰণি সুপৰিচিত সংযুগ্ম সমমিতিৰ পৰা সহজে আহৰণ কৰিব পাৰি। মই প্ৰথমে (১৪) টো লওঁ। ধনাত্মক অংশ যুক্ত যিকোনো বিভাজন P আৰু যিকোনো পূৰ্ণসংখ্যা m দিলে, আপুনি অঋণাত্মক অংশ যুক্ত এটা বিভাজন Q ক নিম্নলিখিত ধৰণে নিৰ্মাণ কৰিব। যদি P ৰ ৰেংক $r \geq m$, তেন্তে আপুনি m ৰেংকৰ Q বিভাজনটো গঠন কৰিবলৈ P ত পৰ্য্যাপ্ত শূন্য যোগ কৰে। যদি P ৰ ৰেংক $r < m$, আপুনি সংযুগ্ম $\overline{P}$ লয় যাৰ ৰেংক $(-r) \geq ১ - m$, আৰু ৰেংক $(১ - m)$ ৰ Q বিভাজন পাবলৈ পৰ্য্যাপ্ত শূন্য যোগ কৰে। P আৰু Q ৰ মাজৰ সম্পৰ্কটো একৈকী-আচ্ছাদিত, আৰু ইয়াৰ দ্বাৰা (১৪) প্ৰমাণিত হয়।

(১৫) ৰ প্ৰমাণ ইয়াতকৈও সহজ। অঋণাত্মক অংশ যুক্ত, m ৰেংকৰ যিকোনো বিভাজন Q ক, আপুনি ধনাত্মক অংশ যুক্ত বিভাজন P পাবলৈ প্ৰতিটো অংশত এক যোগ কৰে, তাৰ পাছত সংযুগ্ম $\overline{P}$ উলিয়ায় আৰু অঋণাত্মক অংশ যুক্ত বিভাজন Q' পাবলৈ প্ৰতিটো অংশৰ পৰা এক বিয়োগ কৰে। Q আৰু Q' ৰ মাজৰ সম্পৰ্কটো একৈকী-আচ্ছাদিত, আৰু ইয়াৰ দ্বাৰা (১৫) প্ৰমাণিত হয়। এতিয়া (১৪), (১৫) সমমিতি দুটা একেলগ কৰিলে আপুনি পাব

$$q_m(n) = p(n-m-১) - q_{m+৩}(n-m-১). \tag{১৬}$$

দুটা প্ৰতিফলনৰ পূৰণফল হৈছে এটা সঞ্চাৰণ (translation)। ইয়াত দুটা প্ৰতিফলনৰ সংমিশ্ৰণৰ পৰা উদ্ভৱ হোৱা ৩ এককৰ সঞ্চাৰণটো লক্ষ্য কৰক। যেতিয়া আপুনি (১৬) ক বাৰম্বাৰ নিজতেই প্ৰতিষ্ঠাপন কৰে, ই দিয়ে যে

$$\begin{aligned} q_m(n) &= p(n-m-১) - p(n-২m-৫) + p(n-৩m-১২) - \cdots \\ &= \sum_{k=১}^{\infty} (-১)^{k-১} p\left(n - km - \frac{১}{২}k(৩k-১)\right). \end{aligned} \tag{১৭}$$

সীমিত সংখ্যক পদৰ পিছত (১৭) শ্ৰেণীটো শেষ হয় আৰু সৃষ্টক ফলনটো দিয়ে

$$\begin{aligned} Q_m(x) &= \sum_{n=১}^{\infty} q_m(n)x^n \\ &= P(x)\sum_{n=১}^{\infty}(-১)^{n-১}x^{\frac{১}{২}n(৩n-১)+mn}, \end{aligned} \tag{১৮}$$

যিটো $m \geq ০$ ৰ বাবে বৈধ। এতিয়া অঋণাত্মক অংশ যুক্ত এটা বিভাজনৰ পৰা এটা শূন্য অংশ আঁতৰালে আন এটা বিভাজন পোৱা যায় যাৰ ৰেংক এক বেছি। গতিকে,

$$q_m(n) - p_m(n) = q_{m+১}(n). \tag{১৯}$$

(১৮) আৰু (১৯) ৰ পৰা, $m \geq ০$ ৰ বাবে সৃষ্টক ফলন (৪) টো পোনেপোনে পাব পাৰি, আৰু সমমিতিৰ দ্বাৰা ঋণাত্মক m অৰ বাবেও (৪) প্ৰযোজ্য। শেষত, আপুনি $m = ০$ আৰু $m = ১$ ৰ বাবে (১৮) যোগ কৰি আৰু (১৪) প্ৰয়োগ কৰি অইলাৰৰ সূত্ৰ (৫) পাব পাৰে। এই আহৰণটোৱেই মই জনা একমাত্ৰ আহৰণ যিয়ে স্বাভাৱিকভাৱে ব্যাখ্যা কৰে যে অইলাৰৰ সূত্ৰত কিয় ৩ আৱিৰ্ভাৱ হয়।

৫. ৱিনকুইষ্ট

ৰামানুজনৰ বাগিচাখনৰ মাজেৰে মোৰ পৰৱৰ্তী খোজটো আৰম্ভ হৈছিল ৱিনকুইষ্টে ৰামানুজনৰ সৰ্বসমতা (৩) সম্পৰ্কীয় তেওঁৰ নতুন প্ৰমাণৰ [৭] বিষয়ে লিখা এখন চিঠিৰ জৰিয়তে। এইটোৱে মোক মেকড'নাল্ডৰ অভেদৰ স্বৰ্গোদ্যানলৈ লৈ গ'ল, যিটোৰ বিষয়ে মই পূৰ্বেও এবাৰ কৈছোঁ [২০]। যোৱা দহ বছৰৰ ভিতৰত মেকড'নাল্ডৰ অভেদ আৰু ইয়াৰ সাধাৰণীকৰণ গণিতৰ আন এক নতুন বৃহৎ ক্ষেত্ৰলৈ পৰিণত হৈছে, যিটো এফালে ৰামানুজনৰ τ-ফলনৰ

পৰা আৰম্ভ কৰি আনটো মূৰত লী বীজগণিত আৰু মনষ্টাৰ সংঘ আৰু জন কনৱেৰ 'মনষ্ট্ৰাছ মুনশ্বাইন'লৈকে বিস্তৃত হৈ পৰিছে [২১, ২২]। ৰামানুজনৰ বাগিচাৰ পৰা অহা বীজবোৰ বতাহত বলি থকাৰ লগতে সমগ্ৰ ভূ-পৃষ্ঠত গজি উঠিছে। আনকি কিছুমান বীজ পদাৰ্থবিজ্ঞানৰ ক্ষেত্ৰলৈও উৰি গ'ল। কেইসপ্তাহমানৰ পূৰ্বে ইনষ্টিটিউট ফৰ এডভাঞ্চড ষ্টাডীৰ অন্যতম যুৱ পদাৰ্থবিজ্ঞানী গ্ৰেগৰী মূৰে লিখা এটা নতুন পূৰ্বপ্ৰকাশ (preprint) দেখি মই আনন্দিত হৈছিলোঁ, যাৰ শিৰোনাম আছিল 'Atkin-Lehner Symmetry' [২৩]। ছুপাৰষ্ট্ৰিং তত্ত্বৰ সতেজ বতাহজাকে পদাৰ্থবিজ্ঞানলৈ এনেধৰণে মডুলাৰ ৰূপ আনিছে যিটো অলিভাৰ এটকিন আৰু জো লেহনাৰে সপোনতো ভবা নাছিল। গ্ৰেগৰী মূৰৰ এটা উক্তি ইয়াত দিয়া হ'ল: "কিছু অৰ্থত, এটকিন-লেহনাৰ ৰূপান্তৰৰ অধীনত ঋণাত্মক চিহ্নৰ অৰ্থ হ'ল আমি উচ্চ শক্তিৰ ব'জনক কম শক্তিৰ ফাৰ্মিয়নৰ সৈতে বিনিময় কৰি আছোঁ, আৰু তাৰ ওলোটাটোও কৰিছোঁ।" এটকিন আৰু লেহনাৰে মডুলাৰ ৰূপৰ শ্ৰেণী-বিভাজনৰ বাবে নিজৰ সংকাৰক আৱিষ্কাৰ কৰাৰ সময়ত ব'জন আৰু ফাৰ্মিয়নৰ কথা ভবা নাছিল। কিন্তু ছুপাৰষ্ট্ৰিং তত্ত্বৰ বিষয়ে মই আৰু নকওঁ। শ্ৰোতাসকলৰ মাজত হয়তো ছুপাৰষ্ট্ৰিঙৰ বিষয়ে মোতকৈ বেছি জনা মানুহ আছে। ছুপাৰষ্ট্ৰিং সমাজৰ স্বপ্নই আমাক ভৌতিক বাস্তৱতাৰ প্ৰকৃত বৰ্ণনা দিব নে নাই সেইটো জানিবলৈ আমি বহু সময় অপেক্ষা কৰিব লাগিব। ইতিমধ্যে মাত্ৰ এটা সিদ্ধান্তহে স্পষ্ট হৈ পৰিছে। ছুপাৰষ্ট্ৰিং তত্ত্ব প্ৰকৃতিৰ প্ৰকৃত প্ৰতিচ্ছবি হওক বা নহওক, ই নিশ্চিতভাৱে বিশুদ্ধ গণিতৰ এক চমকপ্ৰদ সৃষ্টি। বিশুদ্ধ গণিত হিচাপে ই ৰামানুজনৰ বাগিচাত পূৰঠ হোৱা বীজৰ পৰা গজা আন যিকোনো ফুলৰ দৰেই সুন্দৰ।

৬. গাৰ্ভান

ছুপাৰষ্ট্ৰিঙলৈ ফালৰি কাটি অহাৰ পাছত মই মোৰ প্ৰথম প্ৰেমলৈ উভতি যাওঁ, যিটো হৈছে বিভাজন তত্ত্ব। ফ্ৰেংক গাৰ্ভানে কেইমিনিটমানৰ পাছত বক্তব্য আগবঢ়ালে আপোনালোকে শুনিব, যে তেওঁ বিভাজন আৰু সেইবোৰৰ ৰেংক সংজ্ঞায়িত কৰাৰ এটা নতুন উপায় বিচাৰি পাইছে [৮]। তেওঁৰ নতুন সংজ্ঞাৰে তেওঁ এই সংখ্যাটো হিচাপ কৰিব পাৰে

$$P_{q,m}{}^{V}(n),$$

যিটো n ৰ ভেক্টৰ বিভাজনসমূহৰ লগত জড়িত যাৰ ৰেংক মডুলো q ৰ সাপেক্ষে m অৰ সৰ্বসম। ভেক্টৰ বিভাজন কি, সেইটো কোৱাৰ দায়িত্ব মই তেওঁৰ হাতত এৰিলোঁ। নতুন সংজ্ঞাটোৰ পৰিণতি হ'ল যে

$$P_{১১,m}{}^{V}(১১k+৬) = \left(\frac{১}{১১}\right) p(১১k+৬), \tag{২০}$$

যিয়ে আমাক ৰামানুজনৰ তৃতীয় সৰ্বসমতা (৩) ৰ এক বিন্যাস তাত্ত্বিক ব্যাখ্যা দিছে। মোৰ পুৰণি ৰেংকৰ সংজ্ঞাটোৱে (২০) চৰ্তটো পূৰণ কৰিবলৈ ব্যৰ্থ হ'ল। মই গাৰ্ভানৰ বক্তব্য চুৰি কৰিব বিচৰা নাই। মই মাথোঁ ক'ব বিচাৰিছোঁ যে গাৰ্ভানৰ এই সুন্দৰ আৱিষ্কাৰটো এটা অন্ত নহয়, বৰঞ্চ এক আৰম্ভণিহে। তেওঁৰ কৰ্মৰ বাবে মূল প্ৰেৰণা প্ৰদান কৰা ফলাফল (২০) তেওঁৰ বাগিচাত থকা বহুতো ফুলৰ মাজত এটাহে মাত্ৰ। ভৱিষ্যতৰ বাবে অধিক গুৰুত্বপূৰ্ণ হৈছে তেওঁ $P_{q,m}{}^{V}(n)$ আৰু মক থেটা-ফলনৰ মাজত বিচাৰি পোৱা সম্পৰ্কসমূহ। মক থেটা-ফলনে আমাক এতিয়াও আৱিষ্কাৰ নোহোৱা এটা সৰ্বাত্মক সংশ্লেষণৰ ইংগিত দিয়ে। কেনেবাকৈ ইয়াক এটা সুসংহত সংঘ-তাত্ত্বিক গঠনত গঢ়ি তোলা সম্ভৱ হ'ব লাগে, যিটো হেকেই জেকবিৰ পুৰণি থেটা-ফলনসমূহৰ ভিত্তিত গঢ়ি তোলা মডুলাৰ ৰূপৰ গঠনৰ সৈতে সাদৃশ্যপূৰ্ণ। এইটো ভৱিষ্যতৰ বাবে এক প্ৰত্যাহ্বান হৈয়েই আছে। মোৰ সপোন আছে যে মই সেই দিনটো চাবলৈ

জীয়াই থাকিম, যেতিয়া ছুপাৰষ্ট্ৰিং তত্ত্বৰ ভৱিষ্যদ্বাণীসমূহক বাস্তৱিক জগতখনৰ সৈতে মিল ৰাখিবলৈ সংগ্ৰাম কৰি থকা আমাৰ যুৱ পদাৰ্থবিজ্ঞানীসকলে তেওঁলোকৰ বিশ্লেষণাত্মক কৌশলসমূহ বৃদ্ধি কৰি কেৱল থেটা-ফলনেই নহয়, মক থেটা-ফলনকো সামৰি ল'ব। হয়তো আমি এদিন এজন পদাৰ্থবিজ্ঞানীয়ে লিখা পূৰ্বপ্ৰকাশ এটা দেখিবলৈ পাম যাৰ শিৰোনাম 'মক এটকিন-লেহনাৰ সমমিতি'। কিন্তু এইটো সম্ভৱ হৈ উঠাৰ পূৰ্বে মক-মডুলাৰ ৰূপ আৰু তাৰ মক-প্ৰতিসমতাৰ বিশুদ্ধ গাণিতিক অন্বেষণ বহু দূৰলৈ লৈ যাব লাগিব।

৭. এন্দ্ৰুজ আৰু হিকাৰচন

মাত্ৰ যোৱা কেইসপ্তাহমানৰ ভিতৰত ফ্ৰেংক গাৰ্ভানৰ থেছিছ [৮] পঢ়ি জৰ্জ এন্দ্ৰুজৰ সৈতে চিঠিৰ আদান-প্ৰদান কৰাৰ ফলত মই ৰামানুজনৰ বাগিচাত মোৰ সবাতোকৈ শেহতীয়া খোজটো পেলাইছিলোঁ। ৰামানুজনৰ ফলনেৰে আৰম্ভ হৈছিল এই খোজটো

$$R(q) = ১ + \sum_{n=১}^{\infty} \frac{q^{\frac{১}{২}n(n+১)}}{(১+q)(১+q^২)\cdots(১+q^n)}, \tag{২১}$$

যিটো জৰ্জ এন্দ্ৰুজে শেহতীয়া দুখন গৱেষণা-পত্ৰৰ যোগেৰে আমাৰ দৃষ্টিগোচৰ কৰিছিল [২৪, ২৫]। ৰামানুজনৰ হেৰোৱা টোকাবহীত এই ফলনটোৰ উল্লেখ আছে, আৰু ইয়াৰ বৈশিষ্ট্যসমূহ এন্দ্ৰুজ আৰু ডিন হিকাৰছনে এটা পূৰ্বপ্ৰকাশত স্পষ্ট কৰি দিছে [২৬] । তেওঁলোকে লিখিছে

$$R_q = \sum_{n=০}^{\infty} S(n) q^n. \tag{২২}$$

$S(n)$ সহগবোৰৰ এটা সৰল বিন্যাস তাত্ত্বিক অৰ্থ আছে,

$$S(n) = \sum_{P} (-১)^{r(P)}, \tag{২৩}$$

ইয়াক অসমান অংশত বিভক্ত n ৰ বিভাজন P সমূহৰ ভিত্তিত যোগ কৰা হৈছে, য'ত $r(P)$ হৈছে P ৰ ৰেংক। এন্দ্ৰুজে $S(n)$ ৰ কেইবা হাজাৰ মান সাংখ্যিকভাবে গণনা কৰি দেখিলে যে ইয়াৰ অদ্ভুত বৈশিষ্ট্য আছে। প্ৰথমতে, গোটেইবোৰ মান সৰু সৰু। দ্বিতীয়তে, ইয়াৰে অধিকাংশই শূন্য। তেওঁ তেওঁৰ পৰিসৰৰ ভিতৰত $S(n)$ ৰ সৰ্ববৃহৎ মানৰ প্ৰথম আৱিৰ্ভাৱ তালিকাভুক্ত কৰিছিল। সেইকেইটা হ'ল,

$$S(২২) = ৩, \tag{২৪}$$

$$S(৪৫) = ৪, \tag{২৫}$$

$$S(১৬০৯) = ৬, \tag{২৬}$$

$$S(৩২৮৮) = ৮. \tag{২৭}$$

মোৰ মনত পৰিল যে ৰামানুজনৰ বিভাজন সৰ্বসমতা (১), (২), (৩) বুজাৰ ক্ষেত্ৰত, কথাবোৰে সদায় ভালদৰে কাম কৰে যদি বিভাজন-ফলন $p(n)$ অক

$$N = ২৪n + ১ \tag{২৮}$$

অৰ ফলন হিচাপে বিবেচনা কৰা হয়। এই কৌশলটোৱে কাম দিয়ে, কাৰণ $p(n)$ অৰ সৃষ্টক ফলন (৫) অক

$$x^{-(১/২৪)} \tag{২৯}$$

এৰে পূৰণ কৰিব লাগিব, যাৰ দ্বাৰা এইধৰণৰ মডুলাৰ ৰূপ এটা পোৱা যাব–

$$x^{-১/২৪}P(x) = \left[\sum_{-\infty}^{\infty}(-১)^n x^{(৬n-১)^২/২৪}\right]^{-১}. \tag{৩০}$$

গতিকে মই (২৪), (২৫), (২৬), (২৭) ত থকা n অৰ মানৰ সৈতে একেটা কৌশল চেষ্টা কৰিলোঁ। লগে লগে মই পাইছিলোঁ–

$$N = ৫২৯ = ২৩^২, \tag{৩১}$$

$$N = ১০৮১ = ২৩ \cdot ৪৭, \tag{৩২}$$

$$N = ৩৮৬১৭ = ২৩^২ \cdot ৭৩, \tag{৩৩}$$

$$N = ৭৮৯১৩ = ২৩ \cdot ৪৭ \cdot ৭৩. \tag{৩৪}$$

এয়া ব্যৱহাৰিক গণিতৰ এক সুন্দৰ নিদৰ্শন, যিটো ধাৰাক মোৰ সহকৰ্মী আৰ্মাণ্ড বৰেলে শেহতীয়াকৈ ভূয়সী প্ৰশংসা কৰিছে [২৭]। $(২৪k \pm ১)$ আকাৰৰ মৌলিক উৎপাদকত প্ৰকাশ হোৱাটো কোনোধৰণে আকস্মিক হ'ব নোৱাৰে। স্পষ্টভাৱে এই মৌলিক সংখ্যাবোৰে $S(n)$ সহগবোৰৰ গঠনত এক বিশেষ ভূমিকা পালন কৰিব লাগিব। $S(n)$ অৰ প্ৰথম এশটা মানৰ সৈতে কিছু সময় খেলি থকাৰ পাছত মই এটা স্পষ্ট সূত্ৰ পালোঁ,

$$f(N) = S(n). \tag{৩৫}$$

প্ৰত্যেক $N = ২৪n + ১$ অৰ এক অদ্বিতীয় উৎপাদক বিশ্লেষণ আছে

$$N = \eta\left(\prod_{\alpha} {p_\alpha}^{s_\alpha}\right)\left(\prod_{\beta} {q_\beta}^{s_\beta}\right), \tag{৩৬}$$

য'ত p_α হৈছে মডুলো ২৪ অৰ সাপেক্ষে ১ অৰ সৰ্বসম ধনাত্মক মৌলিক সংখ্যা নতুবা ২৪ অৰ সাপেক্ষে -১ অৰ সৰ্বসম মৌলিক সংখ্যাৰ ঋণাত্মক মান। q_β হৈছে মডুলো ২৪ অৰ সাপেক্ষে ±৫, ±৭ বা ±১১ ৰ সৰ্বসম মৌলিক সংখ্যা, আৰু $\eta = \pm১$।

$$\eta = +১ \tag{৩৭}$$

নোহোৱালৈকে সহগ $f(N)$ অৰ মান শূন্য। আৰু সকলো s_β যুগ্ম,

$$s_\beta = ২t_\beta. \tag{৩৮}$$

ইয়াৰ দ্বাৰা বুজা যায় যে বেছিভাগ $S(n)$ কিয় শূন্য। যেতিয়া (৩৭) আৰু (৩৮) সঁচা, তেতিয়া

$$f(N) = \left(\prod_{\alpha}(১ + s_\alpha)\epsilon_\alpha^{s_\alpha}\right)\left(\prod_{\beta}\epsilon_\beta^{t_\beta}\right), \tag{৩৯}$$

য'ত $\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta$ চিহ্নবোৰ তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞায়িত কৰা হৈছে। ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, প্ৰতিটো মৌলিক সংখ্যা p_α ক নিম্নোক্ত ধৰণে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি

$$p_\alpha = a^২ - ৭২b^২, \tag{৪০}$$

আৰু ইয়াৰ পৰা পোৱা যায় যে

$$\epsilon_\alpha = (-১)^b. \tag{৪১}$$

(৪০) নং প্ৰকাশ-ৰাশিটো অদ্বিতীয় নহয়, কিন্তু b ৰ বাবে এটা প্ৰদত্ত p_α ৰ সকলো উপস্থাপনৰ একে সমতা (parity) আছে। শেষত, ϵ_β ক লিজেণ্ড্ৰে চিহ্নৰ দ্বাৰা সংজ্ঞায়িত কৰা হয়

$$\epsilon_\beta = -\left(\frac{২}{q_\beta}\right). \tag{৪২}$$

এই ফলাফলসমূহ পূৰ্বে এন্দ্ৰুজ আৰু হিকাৰছন, দুয়োজনে স্বতন্ত্ৰভাবে আৱিষ্কাৰ কৰিছিল [২৬]। তাতোকৈ গুৰুত্বপূৰ্ণ কথাটো হ'ল এন্দ্ৰুজ আৰু হিকাৰছনে সেইবোৰ প্ৰমাণ কৰিছিল, মই কৰা নাছিলোঁ। তথাপি ৰামানুজনৰ বাগিচাত এনে ফুল ফুলি থকা দেখিবলৈ পাই বৰ ভাল লাগিছিল।

মই আন এটা সৰু ফুল পাইছিলোঁ যিটো এন্দ্ৰুজ আৰু হিকাৰছনৰ চকুত পৰা নাছিল। (৩৯) দ্বাৰা সংজ্ঞায়িত $f(N)$ ফলনটো দেখিলে এনে লাগে যেন ই গুণাত্মক হ'ব লাগে, কিন্তু ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা N অৰ ওপৰত ই প্ৰকৃততে গুণাত্মক নহয়। উদাহৰণস্বৰূপে,

$$f(২৩ \cdot ৪৭) = ৪, \tag{৪৩}$$

কিন্তু $f(২৩)$ আৰু $f(৪৭)$ সংজ্ঞায়িত নহয়। এতিয়া ইয়াৰ প্ৰতিকাৰ স্পষ্ট হৈ পৰিছে। আমি কেৱল (৩৯), (৪০) আৰু (৪১) ব্যৱহাৰ কৰি $f(N)$ ৰ সংজ্ঞাটো ঋণাত্মক $N \equiv ১ \pmod{২৪}$ লৈ সম্প্ৰসাৰিত কৰোঁ। যিহেতু,

$$-২৩ = ৭^২ - ৭২ \cdot ১^২, -৪৭ = ৫^২ - ৭২ \cdot ১^২, \tag{৪৪}$$

(৩৯) নং সংজ্ঞাটোৰ পৰা আমি পাওঁ

$$f(-২৩) = f(-৪৭) = -২, \tag{৪৫}$$

আৰু (৪৩) গুণাত্মক বৈশিষ্ট্যৰ সৈতে সামঞ্জস্যপূৰ্ণ। যিহেতু

$$৭৩ = ১৯^{২} - ৭২ \cdot ২^{২}, \tag{৪৬}$$

আমি পাওঁ

$$f(৭৩) = ২, \tag{৪৭}$$

আৰু $S(n)$ ৰ মান (২৪), (২৫), (২৬), (২৭) সমূহো গুণাত্মক বৈশিষ্ট্যৰ সৈতে সংগতিপূৰ্ণ। সম্প্ৰসাৰিত $f(N)$ ধনাত্মক আৰু ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $N = ২৪n + ১$ ৰ সংহতিটোত গুণাত্মক।

কিন্তু এতিয়া এটা নতুন প্ৰশ্নৰ উত্থাপন হৈছে। যদি আমি $S(n)$ ৰ সংজ্ঞাটো ঋণাত্মক n লৈ সম্প্ৰসাৰণ কৰোঁ, তেন্তে (২২) শ্ৰেণীটো এটা দ্বিপাক্ষিক গুণোত্তৰ শ্ৰেণীলৈ পৰিণত হ'ব

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n)x^n = R(x) + L(x^{-১}), \tag{৪৮}$$

য'ত (২১) দ্বাৰা সোঁহাতৰ শ্ৰেণী $R(q)$ ৰ মান দিয়া হৈছে, আৰু বাওঁহাতৰ শ্ৰেণী $L(q)$ হ'ল–

$$L(q) = -২q - ২q^{২} - ২q^{৩} + ২q^{৭} + ২q^{৮} + \cdots . \tag{৪৯}$$

তেন্তে বাওঁহাতৰ শ্ৰেণীটোৰ অৰ্থ কি

$$L(q) = \sum_{n=১}^{\infty} S(-n)q^n? \tag{৫০}$$

আমি জানো যে $R(q)$ আৰু $L(q)$ ৰ সহগবোৰ $f(N)$ অৰ গুণাত্মক বৈশিষ্ট্যৰ দ্বাৰা বজ্ৰগুণনসাধ্য। কিন্তু এই বজ্ৰগুণনীয়তাই আমাক $L(q)$ ৰ বাবে এটা স্পষ্ট সংজ্ঞা নিদিয়ে। গতিকে মই (৩৯) ৰ পৰা $L(q)$ ৰ প্ৰথম পঞ্চাশটা সহগ গণনা কৰিলোঁ আৰু সুনিৰ্দিষ্ট সূত্ৰটো পালোঁ (পুনৰ ব্যৱহাৰিক গণিত)

$$L(q) = ২\sum_{n=১}^{\infty}(-১)^n \frac{q^{n^{২}}}{(১-q)(১-q^{৩})\cdots(১-q^{২n-১})}, \tag{৫১}$$

যিয়ে $R(q)$ ৰ বাবে ৰামানুজনৰ সূত্ৰ (২১) ক সন্তোষজনকভাবে পৰিপূৰণ কৰে। (২১) ৰ নিচিনাকৈ (৫১) নং সংজ্ঞাৰ এটা বিন্যাস তাত্ত্বিক ব্যাখ্যা আছে। (২৩) ৰ সলনি এতিয়া আমাৰ হাতত আছে

$$S(-n) = ২\sum_{P}(-১)^{\ell(P)}, \tag{৫২}$$

য'ত, অযুগ্ম অংশৰে গঠিত আৰু দুটা ক্ৰমিক অংশৰ মাজত সৰ্বাধিক পাৰ্থক্য ২ লৈ n ৰ বিভাজনসমূহৰ দ্বাৰা P ক

যোগ কৰা হয়, আৰু

$$\ell(P) = \frac{১}{২}(\text{বৃহত্তম অংশ} + ১). \quad (৫৩)$$

জৰ্জ এন্দ্ৰুজ আৰু ডিন হিকাৰছনে বেইলিৰ কৌশল ব্যৱহাৰ কৰি (৫১) ৰ প্ৰমাণ দিবলৈ সক্ষম হৈছিল [১০, ১৫]। তাৰ পাছত আমাৰ হাতত ক্ৰমাগত দুই ফলন $R(q)$ আৰু $L(q)$ ৰ এটা পৰিবন্ধ গোট আছে যাৰ প্ৰত্যেকৰে ৰামানুজনৰ ধৰণৰ এটা শ্ৰেণী সম্প্ৰসাৰণ আছে, আৰু বজ্ৰগুণনীয় সহগ আছে।

$R(q)$ আৰু $L(q)$ ফলনৰ এই যোৰটো আজি এক বিচ্ছিন্ন কৌতুহল। কিন্তু মই নিশ্চিত যে, ৰামানুজনৰ বাগিচাখনৰ আন বহুতো ধুনীয়া বস্তুৰ দৰেই ই এক বহল গাণিতিক সংৰচনাৰ এক বিশেষ উদাহৰণ হৈ উঠিব। বজ্ৰগুণনীয়তাৰ দ্বাৰা সম্পৰ্কিত সহগ থকা দুটা বা তাতকৈ অধিক ফলনৰ আন কিছুমান গোট সম্ভৱতঃ আছে, যিসমূহে ৰামানুজনে তেওঁৰ $R(q)$ ৰ বাবে আৱিষ্কাৰ কৰাৰ দৰেই অভেদ মানি চলে। মোৰ এটা অনুমান যে এনে বজ্ৰগুণনীয় ফলনৰ সমষ্টিসমূহে এক সংৰচনাৰ সৃষ্টি কৰিব যাৰ ভিতৰত মক থেটা-ফলনসমূহেও স্থান পাব। কিন্তু এই অনুমান কোনো প্ৰতিষ্ঠিত প্ৰমাণৰ দ্বাৰা সমৰ্থিত নহয়। যদি কোনো সংযোগ আছে, তাক বিচাৰি উলিওৱাৰ দায়িত্ব মই সমৱেত শ্ৰোতামণ্ডলীলৈ এৰিলোঁ।

সামৰণিত ৰামানুজনৰ ধাৰণাৰে সমৃদ্ধ গণিতৰ ভিন্ন ক্ষেত্ৰত কাম কৰি থকা আপোনালোক আটাইকে আহ্বান জনাইছোঁ যে পুনৰ উৎসলৈ, সংগ্ৰহীত গৱেষণা-পত্ৰ আৰু টোকাবহীলৈ উভতি যাওঁক। হাৰ্ডিৰ প্ৰস্তাৱনা সম্বলিত গৱেষণা-পত্ৰৰ সংকলনখন [২৮] ১৯২৭ চনত প্ৰকাশ হৈছিল। "হেৰাই" নোযোৱা টোকাবহীবোৰ ১৯৫৭ চনত প্ৰকাশ হৈছিল [২৯], আৰু এতিয়া সেইখন ব্ৰুচ বাৰ্ণ্টৰ সম্পাদনাত এক সুন্দৰ টোকাযুক্ত সংস্কৰণ হিচাপে প্ৰকাশ পাইছে [৩১]। "হেৰোৱা" টোকাবহীখন এতিয়া জৰ্জ এন্দ্ৰুজৰ নিষ্ঠাৱান পৰিশ্ৰমৰ ফলত আমাৰ বাবে সুলভ [৪]। ৪৭ বছৰ আগতে যেতিয়া মই ৰামানুজনৰ বাগিচাখনৰ মাজেৰে খোজ কাঢ়িবলৈ আৰম্ভ কৰিছিলোঁ, তেতিয়া কেৱল সংকলিত গৱেষণা-পত্ৰসমূহহে পোৱা গৈছিল। হাৰ্ডি আৰু ৰাইটৰ 'Theory of Numbers' [৫] কিতাপখন স্কুলৰ পুৰস্কাৰ হিচাপে বাছি লোৱাৰ এবছৰৰ পাছত মই আন এটা পুৰস্কাৰ লাভ কৰিলোঁ। দ্বিতীয় পুৰস্কাৰটোৰ বাবে মই ৰামানুজনৰ গৱেষণা-পত্ৰৰ সংকলনখন বাছি লৈছিলোঁ। সংকলনখনে মোৰ লগত ইংলেণ্ডৰ পৰা আমেৰিকালৈ যাত্ৰা কৰিছে আৰু আজিও ১৯৪০ চনৰ দৰেই সতেজ হৈ আছে। যেতিয়াই মোৰ খং উঠে বা হতাশা আহে, তেতিয়াই গৱেষণা-পত্ৰৰ সংকলনখন শ্বেল্ফৰ পৰা উলিয়াই ৰামানুজনৰ বাগিচাত নিৰৰে খোজ কাঢ়োঁ। মূৰৰ বিষ বা স্নায়ৱিক সমস্যাত ভুগি থকা সকলোকে মই এইটো চিকিৎসাৰ পৰামৰ্শ দিওঁ। আৰু ৰামানুজনৰ গৱেষণা-পত্ৰসমূহ কেৱল মূৰৰ বিষৰ বাবেই ভাল থেৰাপী নহয়। ইয়াৰ উপৰি ই ধুনীয়া ধুনীয়া ধাৰণাৰে ভৰি আছে যিয়ে আপোনাক অধিক আকৰ্ষণীয় গণিত কৰিবলৈ সহায় কৰিব পাৰে।

তথ্যসূত্ৰ

[১] J. M. Whittaker, "George Neville Watson," Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society, 12, 521-530 (1966).

[২] G. N. Watson, "The Final Problem: an account of the mock theta functions," J. London Math. Soc. 11, 55-80 (1936).

[৩] For example, A. O. L. Atkin, "Proof of a Conjecture of Ramanujan," Glasgow Math. Journal 8, 14-32 (1967).

[৪] G. E. Andrews, "An Introduction to Ramanujan's 'Lost' Notebook," Am. Math. Monthly 86, 89-108

(1979), and a series of papers in "Advances in Mathematics," (1981-1987).
[৫] G. H. Hardy and E. M. Wright, "An Introduction to the Theory of Numbers," (Oxford, Clarendon Press, 1938).
[৬] G. H. Hardy and W. W. Rogosinski, "Fourier Series," Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 38 (Cambridge University Press, 1944).
[৭] L. Winquist, "An Elementary Proof of $p(11m + 6) = 0 \pmod{11}$," J. Combinatorial Theory, 6, 56-59 (1969).
[৮] F. G. Garvan, "Generalizations of Dyson's Rank," Pennsylvania State University Ph.D. Thesis, 1986.
[৯] A. O. L. Atkin and P. Swinnerton-Dyer, "Some Properties of Partitions," Proc. London Math. Soc (3) 4, 84-106 (1953).
[১০] G. E. Andrews, "q-Series: their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra," American Mathematical Society, Regional Conference Series in Mathematics, No.66 (1986).
[১১] F. J. Dyson, "Some Guesses in the Theory of Partitions," Eureka, 8, 10-15 (1944).
[১২] A. C. Falconer, "Short Vision," Eureka, 8, 15 (1944).
[১৩] See chapter 3 of [১০].
[১৪] W. N. Bailey, "Some Identities in Combinatory Analysis," Proc. London Math. Soc. (2) 49, 421-435 (1947).
[১৫] W. N. Bailey, "Identities of Rogers-Ramanujan Type," Proc. London Math. Soc. (2) 50, 1-10 (1949).
[১৬] A. O. L. Atkin, "Multiplicative Congruence Properties and Density Problems for $p(n)$," Proc. London Math. Soc. (3) 18, 563-576 (1968).
[১৭] A. O. L. Atkin, "Congruence Hecke Operators," American Math. Soc. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 12, 33-40 (1969).
[১৮] A. O. L. Atkin, Obituary notice of Margaret Hillary Millington, née Ashworth, Bull. London Math. Soc. 17, 484- 486 (1985).
[১৯] F. J. Dyson, "A New Symmetry of Partitions," J. Combinatorial Theory, 7, 56-61 (1980).
[২০] F. J. Dyson, "Missed Opportunities," Bull. Am. Math. Soc. 78, 635-653 (1972).
[২১] J. H. Conway and S. P. Norton, "Monstrous Moonshine," Bull. London Math. Soc. 11, 308-339 (1979).
[২২] I. B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, "A Natural Representation of the Fischer-Griess Monster with the modular function J as character," Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 81, 3256-3260 (1984).
[২৩] G. Moore, "Atkin-Lehner Symmetry," Institute for Advanced Study Preprint HUTP-87/A013 (March 1987).
[২৪] G. E. Andrews, "Ramanujan's 'Lost' Notebook V: Euler's Partition Identity," Adv. Math. 61, 156-164 (1986).
[২৫] G. E. Andrews, "Questions and Conjectures in Partition Theory," Am. Math. Monthly, 93, 708-711 (1986).
[২৬] G. E. Andrews and D. Hickerson, "Partitions and Indefinite Quadratic Forms," Preprint, April 1987.
[২৭] A. Borel, "Mathematics: Art and Science," Math. Intelligencer, 5, No. 4, 9-17 (1983).
[২৮] S. Ramanujan, Collected papers, ed. G. H. Hardy, P.V. Seshu Aiyar and B. M. Wilson, (Cambridge University Press, 1927).
[২৯] "Notebooks of S. Ramanujan," 2 volumes, (Bombay, Tata Institute of Fundamental Research, 1957).
[৩০] G. E. Andrews, "The Fifth and Seventh Order Mock Theta Functions," Trans. Am. Math. Soc. 293, 113-134 (1986).
[৩১] B. C. Berndt, ed. Ramanujan's Notebooks, Vol. 1 (New York, Springer, 1985).
[৩২] G. E. Andrews and F. G. Garvan, "Ramanujan's 'Lost' Notebook, VI: The Mock Theta Conjectures," Preprint, Pennsylvania State University (1987).