তৃতীয় মাত্ৰাৰ ম’ক থেটা ফলন $\xi(q)$

ড° হীৰকজ্যোতি দাস

hirakjyoti@live.in

প্ৰস্তাৱনা

ইংলেণ্ডত প্ৰায় পাঁচটা বছৰ কটোৱাৰ পাছত 1919 চনৰ 17 ফেব্ৰুৱাৰীত ৰামানুজন ভাৰতলৈ ঘূৰি আহে। যদিওবা ইংলেণ্ডত শেষৰ দুটা বছৰৰ বেছিভাগ সময় শাৰীৰিক অসুস্থতাৰ বাবে তেওঁ নাৰ্চিংহোমত কটাবলগীয়া হয়, গণিতৰ সম্পৰ্কত তেওঁ কাম অব্যাহত ৰাখিছিল। 1920 চনৰ 26 এপ্ৰিলত ৰামানুজনৰ দেহাৱসান হয়। অসুস্থতাৰ সময়ত ৰামানুজনে কৰা গাণিতিক কৰ্মৰাজিৰ ভিতৰত ম’ক থেটা ফলন অন্যতম। 1976 চনত তেওঁৰ ‘হেৰোৱা টোকাবহী’ (Ramanujan’s lost notebook) আৱিষ্কাৰ হোৱালৈকে গাণিতিক সম্প্ৰদায়ে কেৱল ম’ক থেটা ফলনৰ বিষয়েহে জানিছিল। এই ফলনবোৰ ৰামানুজনে হাৰ্ডিলৈ প্ৰেৰণ কৰা অন্তিমখন চিঠিত বৰ্ণনা কৰে, য’ত তেওঁ লিখিছিল,

> *“এতিয়ালৈকে আপোনালৈ এখনো চিঠি নিলিখা বাবে মই অত্যন্ত দুঃখিত... অলপতে মই কিছুমান বৰ আকৰ্ষণীয় ফলন আৱিষ্কাৰ কৰিছোঁ, যিবোৰক মই “ম’ক” θ-ফলন নাম দিছোঁ। “মিছা” θ-ফলনৰ (false theta function) বিপৰীতে (যিবোৰ প্ৰ. ৰ’জাৰ্চে আংশিকভাবে অধ্যয়ন কৰিছিল) এই ফলনবোৰো সাধাৰণ θ-ফলনৰ দৰে সুন্দৰকৈ গণিতত প্ৰৱেশ কৰে। এই চিঠিখনেৰে মই আপোনালৈ কেইটামান উদাহৰণ পঠিয়াইছোঁ।”*

এই চিঠিখনত ৰামানুজনে চাৰিটা তৃতীয় মাত্ৰাৰ, দহটা পঞ্চম মাত্ৰাৰ, আৰু তিনিটা সপ্তম মাত্ৰাৰ ম’ক থেটা ফলন নিৰ্ধাৰণ কৰে। ফলনকেইটাৰ মাত্ৰাৰ (order) সম্পৰ্কে তেওঁ অৱশ্যে একো লিখা নাছিল। কিন্তু চিঠিখনত তেওঁ তৃতীয় আৰু পঞ্চম মাত্ৰাৰ ফলনকেইটাই মানি চলা অভেদ (identity) কিছুমান উল্লেখ কৰিছিল।

1934 চনত হাৰ্ডিয়ে ৰামানুজন জড়িত ভালেখিনি তথ্য ৱাটচনলৈ পঠিয়ায়। কিন্তু সেই তথ্যখিনিৰ মাজত হয়তো ৰামানুজনৰ হেৰোৱা টোকাবহীখিনি নাছিল বা আছিল যদিও ৱাটচনে গোটেই তথ্যখিনি বিতংকৈ চোৱা নাছিল। কাৰণ 1936 আৰু 1937 চনত প্ৰকাশ পোৱা ৱাটচনৰ দুখন গৱেষণা-পত্ৰত তেওঁ লিখে যে কিছুমান তৃতীয় মাত্ৰাৰ ম’ক থেটা ফলন আৰু সেইবোৰৰ পৰিৱৰ্তন সূত্ৰৰ (transformation laws) বিষয়ে ৰামানুজন অজ্ঞাত আছিল। কিন্তু হেৰোৱা টোকাবহীত ৰামানুজনে সেই ম’ক থেটা ফলনবোৰৰ পৰিৱৰ্তন সূত্ৰবোৰ পৰীক্ষা কৰিছিল। হেৰোৱা টোকাবহীৰ প্ৰসংগ দৰ্শোৱাৰ কাৰণ হ’ল, তাত ৰামানুজনে ষষ্ঠ আৰু দশম মাত্ৰাৰ ম’ক থেটা ফলন কিছুমানো লিখি ৰাখিছিল।

ৰামানুজনৰ গণিতৰ প্ৰতি ৱাটচনৰ আগ্ৰহ 1930 দশকৰ শেষৰফালে হ্ৰাস পায়। যিহেতু 1947 চনত হাৰ্ডিৰ মৃত্যু হয়, এয়া অনুমান কৰা হয় যে 1934 আৰু 1947 চনৰ মাজৰ কোনোবা সময়ত; সম্ভৱতঃ 1947 চনৰ ওচৰত হাৰ্ডিয়ে ৱাটচনক হেৰোৱা টোকাবহীৰ পাণ্ডুলিপিটো দিছিল।

1965 চনত ৰাটচনৰ মৃত্যুৰ পাছত, ৰেংকিনৰ প্ৰস্তাৱ অনুযায়ী হেৰোৱা টোকাবহীৰ পাণ্ডুলিপিটো ট্ৰিনিটি কলেজৰ পুথিভঁড়াললৈ নিয়া হয়। প্ৰায় দহ বছৰ ধৰি পাণ্ডুলিপিটো সেই পুথিভঁড়ালতেই 'হেৰাই ৰৈছিল'। 1976 চনত এণ্ড্ৰুজে তাত পাণ্ডুলিপিটো বিছাৰি পায়। নিঃসন্দেহে পাণ্ডুলিপিটো বিছাৰি পাবলৈ এণ্ড্ৰুজ একেবাৰেই সঠিক মানুহজন আছিল। হেৰোৱা টোকাবহীৰ আটাইতকৈ আকৰ্ষণীয় বস্তুখিনিয়েই আছিল ম'ক থেটা ফলন।

প্ৰায় 15 বছৰ পাছত, 1991 চনত এণ্ড্ৰুজ আৰু হিকাৰচনে [1] ম'ক থেটা ফলনৰ সংজ্ঞা আগবঢ়ায়। বছৰ বাগৰাৰ লগতে বহুকেইজন গণিতজ্ঞই নতুন ম'ক থেটা ফলন আৱিষ্কাৰ কৰাৰ উপৰি সেইবোৰৰ সম্পৰ্কত অধ্যয়ন কৰিবলৈ লয়। ম'ক থেটা ফলনৰ শ্ৰেণী সম্প্ৰসাৰণৰ (series expanion) সহগবোৰৰ (coefficients) সম্পৰ্কত গৱেষণা আৰম্ভ কৰা হয়। তাৰ ভিতৰত সহগবোৰৰ সৰ্বসমতা ফলাফলবোৰ (congruence result) অন্যতম।

থেটা আৰু বিভাজন ফলন

পোনপ্ৰথমে q-গুণফলৰ (q-Product) সংজ্ঞা দি লোৱা যাওক। জটিল সংখ্যা a, q, য'ত $|q|<1$, আৰু স্বাভাৱিক সংখ্যা $n\geq 1$ অৰ বাবে, আমি ধৰি লওঁ যে

$$(a;q)_n := \prod_{j=0}^{n-1}\left(1-aq^j\right), \qquad (a;q)_\infty := \prod_{j=0}^{\infty}\left(1-aq^j\right), \qquad f_n := (q^n;q^n)_\infty .$$

জটিল সংখ্যা a আৰু b যাতে $|ab|<1$ অৰ বাবে ৰামানুজনৰ সাধাৰণ থেটা ফলনৰ সংজ্ঞা হ'ল:

$$f(a,b) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{n(n+1)/2}b^{n(n-1)/2}.$$

ইয়াৰ তিনিটা বিশেষ আৰু জনপ্ৰিয় উদাহৰণ হ'ল:

$$f(-q) := f(-q,-q^2), \quad \varphi(q) := f(q,q), \quad \psi(q) := f\left(q,q^3\right).$$

এই থেটা ফলন তিনিটাই পৰস্পৰৰ মাজত কেইবাটাও অভেদ মানি চলে।

যিকোনো ধণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n অৰ বিভাজন (partition) হৈছে n বা তাতোকৈ সৰু ধণাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ এটা অহ্ৰাসাত্মক সীমিত শ্ৰেণী যাতে অখণ্ড সংখ্যাবোৰৰ যোগফল n হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, 5 অৰ এটা বিভাজন হ'ল $(3,1,1)$, আৰু 5 অৰ সৰ্বমুঠ 7 টা বিভাজন আছে। ধণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n অৰ আটাইবোৰ বিভাজন গণনা কৰা ফলন $p(n)$ অক বিভাজন ফলন (partition function) বুলি কোৱা হয়। যেনে $p(5)=7$.

গণিতজ্ঞসকলে $p(n)$ অৰ উপৰি, শেহতীয়াভাবে কিছুমান বন্ধিত বিভাজন ফলন (restricted partition function) অধ্যয়ন কৰিবলৈ লৈছে। কিছুমান ম'ক থেটা ফলনৰ শ্ৰেণী সম্প্ৰসাৰণৰ সহগবোৰক বন্ধিত বিভাজন ফলনৰ ৰূপতো প্ৰকাশ কৰিব পৰা যায়।

আমাৰ শেহতীয়া এখন গৱেষণা-পত্ৰ

2003 চনত গোৰ্ডন আৰু মেকিন্তোচে [4] তলত দিয়া তৃতীয় মাত্ৰাৰ ম'ক থেটা ফলনটো আৱিষ্কাৰ কৰিছিল।

$$\xi(q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{6n^2-6n+1}}{(q;q^6)_n\,(q^5;q^6)_n} =: \sum_{n=0}^{\infty} p_\xi(n)q^n.$$

প্ৰায় 18 বছৰ পাছত, 2021 চনত চিলভা আৰু চেলাৰ্চে [3] $p_\xi(n)$ৰ সম্পৰ্কত পুনৰ অধ্যয়ন কৰে। তেওঁলোকে

প্ৰধানকৈ $p_\xi(n)$ অৰ কিছুমান সৃষ্টক ফলন (generating function) আৰু সৰ্বসমতা ফলাফল কিছুমান আৱিষ্কাৰ কৰিছে। উদাহৰণস্বৰূপে, তেওঁলোকে প্ৰমাণ কৰিছে যে

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_\xi(3n)q^n = \frac{f_2 f_3^4}{f_1^2 f_6^2}. \tag{1}$$

উপৰোক্ত সৃষ্টক ফলনটোৱেই আমাৰ গৱেষণাৰ প্ৰধান ভেটি। 2009 চনত ৰাডুৱে [5] সৃষ্টক ফলন এটাৰ পৰা সৰ্বসমতা ফলাফল আৱিষ্কাৰ কৰিব পৰা পদ্ধতি এটা আগবঢ়াইছিল। তেওঁৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি ভালেকেইজন গৱেষকে পাছলৈ বিভিন্ন বিভাজন ফলনৰ সৰ্বসমতা ফলাফল উলিয়াবলৈ সক্ষম হয়। আমাৰ গৱেষণাতো ৰামানুজনৰ থেটা ফলনৰ উপৰিও ৰাডুৰ পদ্ধতিটো প্ৰয়োগ কৰা হৈছে। এইখিনিতে আমাৰ গৱেষণাৰ ফলাফলসমূহ উল্লেখ্য। যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা n অৰ বাবে আমি পাওঁ যে

$$p_\xi(1800n + r) \equiv 0 \pmod{120} \quad \text{য'ত } r \in \{435, 795, 1155, 1515\},$$
$$p_\xi(504n + r) \equiv 0 \pmod{4032} \quad \text{য'ত } r \in \{219, 291, 435\}.$$

সাধাৰণতে mod 5 আৰু mod 7 জড়িত সৰ্বসমতাত 1800 বা 504 অৰ দৰে ডাঙৰ যোগাত্মক প্ৰগতি (arithmetic progression) দেখিবলৈ পোৱা নাযায়। এই দৃষ্টিভংগীৰ ফালৰ পৰা উপৰোক্ত সৰ্বসমতা ফলাফলসমূহ অপ্ৰত্যাশিত বুলি ক'ব পৰা যায়। অৱশ্যে এই সৰ্বসমতা ফলাফলসমূহ আৰম্ভণিতে কম্পিউটাৰ সঁজুলি 'মেথেমেটিকা'ৰ জৰিয়তে বিছাৰি উলিওৱা হৈছিল।

উল্লেখনীয় যে ওপৰত দিয়া সৰ্বসমতাসমূহ প্ৰমাণ কৰিবলৈ ৰাডুৰ পদ্ধতিটো সৃষ্টক ফলন (1) অত পোনে পোনে প্ৰয়োগ কৰিব পৰা নাযায়। সেইবাবে আমি ৰামানুজনৰ থেটা ফলনবোৰে মানি চলা কিছুমান অভেদ ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ সৃষ্টক ফলন দুটা আৱিষ্কাৰ কৰিছোঁ।

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_\xi(24n+3)q^n = 2\psi(q) + 24q\frac{f_2^3 f_6^5}{f_1^6 f_3},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_\xi(72n+3)q^n = 2f(q, q^2) + 576q\frac{f_2^{14} f_3^5}{f_1^{18}} + 5184q^2\frac{f_2^{14} f_3^5 f_9^3}{f_1^{21}}.$$

এতিয়া $p_\xi(24n+3)$ আৰু $p_\xi(72n+3)$ ৰ উপৰোক্ত সৃষ্টক ফলন দুটাৰ প্ৰতিটো পদতেই ৰাডুৰ পদ্ধতিটো সফলভাৱে প্ৰয়োগ কৰি আমাৰ সৰ্বসমতাসমূহ প্ৰমাণ কৰিব পৰা যায়।

আমাৰ এই গৱেষণা [2] যোৱা 19 চেপ্তেম্বৰত ৰামানুজন জাৰ্নেলে (The Ramanujan Journal) প্ৰকাশ কৰিছে।

তথ্যসূত্ৰ

[1] Andrews, G.E., Hickerson, D.: Ramanujan's "lost" notebook. VII. The sixth order mock theta functions. Adv. Math. **89**, 60–105 (1991)

[2] Baruah, N.D., Das, H.: Congruences for the coefficients of a pair of third and sixth order mock theta functions. Ramanujan J. (2022), https://doi.org/10.1007/s11139-022-00635-8

[3] Da Silva, R., Sellers, J.A.: Congruences for the coefficients of the Gordon and McIntosh mock theta function $\xi(q)$. Ramanujan J. (2021), https://doi.org/10.1007/s11139-021-00479-8

[4] Gordon, B., McIntosh, R.J.: Modular transformations of Ramanujan's fifth and seventh order mock theta functions. Ramanujan J. **7**, 193–222 (2003)

[5] Radu, S.: An algorithmic approach to Ramanujan's congruences. Ramanujan J. **20**, 215–251 (2009)