$১+২+\cdots+n=\dfrac{n(n+১)}{২}$ ৰ অনেক প্ৰমাণ

টম এডগাৰ আৰু এনৰিকে ট্ৰেবিনো • অনুবাদ : পংকজ জ্যোতি মহন্ত

টম এডগাৰ (Tom Edgar) পেচিফিক লুথেৰাণ বিশ্ববিদ্যালয়ৰ গণিত বিভাগৰ অধ্যাপক আৰু 'Mathematical Association of America'ই প্ৰকাশ কৰা আলোচনী 'Math Horizons'অৰ সম্পাদক। এনৰিকে ট্ৰেবিনো (Enrique Treviño) আমেৰিকাৰে লেক ফৰেষ্ট মহাবিদ্যালয়ৰ গণিত বিভাগৰ অধ্যাপক। প্ৰসিদ্ধ সংখ্যা-তত্ত্ববিদ কাৰ্ল পমাৰেন্সৰ তত্বাৱধানত ডক্টৰেট ডিগ্ৰী লোৱা এনৰিকে ট্ৰেবিনো 'The College Mathematics Journal'অৰ এগৰাকী সহযোগী সম্পাদক।

বৰ্গ আৰু আয়তৰ চিত্ৰৰ সহায়ত $(a+b)^২ = a^২ + ২ab + b^২$ সূত্ৰটো প্ৰমাণ কৰাৰ আকৰ্ষণীয় ভিডিঅ' এটা কেইবছৰমান আগতে ভাইৰেল হৈছিল। আচৰিত কথাটো আছিল এই যে– সেইটো উপভোগ কৰি বহু সংখ্যক মানুহে নিজৰ নিজৰ স্কুলীয়াকালৰ গণিতৰ শিক্ষকসকলক অতিপাত গালি পাৰিছিল আৰু কৈছিল যে শিক্ষকে তেওঁলোকক এনেকৈ গণিত শিকোৱা হ'লে তেওঁলোকে গণিত পাৰিলেহেঁতেন।

প্ৰকৃততে তেনেকৈ গণিত শিকোৱাটো সদায় সম্ভৱ নহয়। সেইটো শ্ৰেণীত নিশিকোৱা বেলেগ এটা প্ৰমাণহে আছিল, যেনেকুৱা প্ৰমাণ সকলো উপপাদ্যৰে নাথাকে। ঘাত ৩ ৰ বাবেও একেধৰণৰ এটা প্ৰমাণ আছে, কিন্তু তাতকৈ অধিক ঘাতৰ বাবে সেইদৰে প্ৰমাণ কৰি দেখুৱাব পাৰিনে? এই প্ৰশ্নটোৰ বাবেই সেই প্ৰমাণটোৰ গুৰুত্ব ঠাইতে শেষ হৈ যায়।

সেই কাহিনীটো দেখাৰে পৰা, একোটা উপপাদ্যৰ বিভিন্ন প্ৰমাণ থাকিব পৰা সম্পৰ্কত মই বিভিন্ন মাধ্যমত লিখি আহিছোঁ। যোৱা সংখ্যাৰ 'গণিত বিকাশ'তো তেনেকুৱা এটা লেখা আছিল। কোনো এটা প্ৰমাণে যদি আমোদ দিয়ে, সেইটো শিকোৱা শিক্ষকজন ভাল, আনসকল বেয়া, কথাটো তেনেকুৱা নহয়। কথাটো আচলতে এনেকুৱাহে যে, প্ৰতিটো প্ৰমাণে বেলেগ একো একোটা দিশ দেখুৱায়। উদাহৰণস্বৰূপে, মৌলিক সংখ্যা অসীম সংখ্যক আছে বুলি কেইবাধৰণে প্ৰমাণ কৰিব পাৰি। তাৰে এটা প্ৰমাণ দিছিল ইউক্লিডে, আন এটা দিছিল অয়লাৰে। সেই দুয়োটাৰে সম্পূৰ্ণ সুকীয়া আৰু মহৎ গুৰুত্ব আছে। আৰু ইউক্লিডৰ প্ৰমাণটোৰ বাহিৰে বাকী প্ৰমাণবোৰ তুলনামূলকভাৱে কঠিন। আনহাতে, চৰ্তৰ সামান্য সাল-সলনি ঘটিলেই পৃথক হৈ পৰা উপপাদ্য একোটাৰ প্ৰমাণটো দুৰূহ হৈ যাব পাৰে। যেনে, পাইথাগোৰীয় সমীকৰণৰ সমাধানৰ বিপৰীতে ফাৰ্মাৰ অন্তিম উপপাদ্য প্ৰমাণৰ কাহিনী।

এই লেখাটোত প্ৰথম n টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ যোগফল নিৰ্ণয়ৰ বহুপৰিচিত সূত্ৰটোৰ ৩৫ টা প্ৰমাণ আছে। লেখাটোৰ অনুবাদ 'গণিত বিকাশ'ত প্ৰকাশৰ বাবে এনৰিকে ট্ৰেবিনোৰ লগত যোগাযোগ কৰিছিলোঁ। তেওঁ সহ-লেখক টম এডগাৰৰ সৈতে আলোচনা কৰি জনালে যে তেওঁলোকে এইটো লিখাৰ সময়ত আৰু দুটামান প্ৰমাণ সংযোগ কৰিব বিচাৰিছিল, কিন্তু সেয়া তেতিয়া হোৱা নাছিল। সেয়েহে তেওঁলোকে সেই প্ৰমাণকেইটাও সংযোগ কৰিলে, আৰু কিছুদিন পাছত এনৰিকে ট্ৰেবিনোৱে নতুন লেখাটো প্ৰেৰণ কৰিলে। তেওঁলোক দুয়োজনলৈ কৃতজ্ঞতা জনালোঁ।

আচলতে, ইয়াত অনুবাদ কৰিবলগীয়া বিশেষ বাক্য অধিক নাই। মূল লেখাটোৱো আমি হয়তো প্ৰকাশ কৰিব পাৰিলোঁহেঁতেন। তথাপি অসমীয়া ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সুবিধাৰ বাবে অসমীয়া ৰূপত প্ৰকাশ কৰা হ'ল। ইয়াত প্ৰমাণসমূহ সংক্ষিপ্ত বা সংকেতপূৰ্ণভাৱে আছে, সেয়েহে স্কুলীয়া ছাত্ৰ-ছাত্ৰী আৰু শিক্ষকে প্ৰমাণসমূহ বহলাই আলোচনা কৰিবলগীয়া হ'ব পাৰে।

উপপাদ্য ১. ধৰা হওক n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। তেন্তে

$$১ + ২ + \cdots + n = \frac{n(n+১)}{২}.$$

১) গাণিতিক আৱেশ:

যিহেতু $১(২)/২ = ১$, গতিকে $n = ১$ অৰ বাবে ই সত্য। এতিয়া ধৰা হওক, ই n অৰ বাবে সত্য। তেতিয়া,

$$১ + ২ + \cdots + n + (n+১) = (১ + \cdots + n) + (n+১) = \frac{n(n+১)}{২} + (n+১) = \frac{n+১}{২}(n+২).$$

২) গাউছৰ কৌশল:

ধৰা হ'ল $S = ১ + ২ + \cdots + n$. তেতিয়া,

$$S = ১ + ২ + \cdots + (n-১) + n$$
$$S = n + (n-১) + \cdots + ২ + ১,$$

গতিকে,

$$২S = (n+১) + (n+১) + \cdots + (n+১) = n(n+১).$$

ইয়াৰ পৰা ফলাফলটো পোৱা যায়।

টোকা ২. একোটা সমান্তৰ প্ৰগতিত থকা সংখ্যাসমূহ যোগ কৰিবলৈ এই কৌশলটোক সাধাৰণীকৰণ কৰিব পাৰি। কাৰ্যতঃ, ধৰা হওক আমাৰ হাতত $a, a+b, a+২b, \ldots, a+(n-১)b$ সমান্তৰ প্ৰগতিটো আছে আৰু আমি পদবোৰ যোগ কৰিব বিচাৰিছোঁ। তেতিয়া,

$$S = a + (a+b) + \cdots + (a + (n-১)b).$$

একেটা ধাৰণাকে খটুৱাই আমি পাম $২S = n(a + a + (n-১)b)$. আন ভাষাৰে, যোগফলটো হ'ল প্ৰথম আৰু শেষ পদ দুটাৰ যোগফল $(a + (a + (n-১)b))$ ৰ সৈতে পদৰ সংখ্যাৰ (n) পূৰণফলৰ আধা।

৩) গাউছৰ কৌশলৰ ভিন্নতা:

ধৰা হওক n যুগ্ম, অৰ্থাৎ, $n = ২k$. তেতিয়া আমি যোগটো তলত দিয়া দৰে থূপ কৰি ল'ব পাৰোঁ:

$$১ + ২ + \cdots + n = (১ + ২k) + (২ + (২k-১)) + \cdots + (k + (k+১)) = k(২k+১) = \frac{n(n+১)}{২}.$$

ধৰা হওক n অযুগ্ম, অৰ্থাৎ, $n = ২k+১$. তেতিয়া আমি যোগটো এনেদৰে দৰে থূপ কৰি ল'ব পাৰোঁ যে

$$(১ + (২k)) + (২ + (২k-১)) + \cdots + (k + (k+১)) + (২k+১) = (২k+১)(k+১) = \frac{n(n+১)}{২}.$$

৪) সম্ভাৱিতামূলক প্ৰমাণ:

ধৰা হ'ল X হৈছে n-টা কাষ যুক্ত দুটা পাশাগুটিৰ যোগফল। এতিয়া, $k = ২, ৩, \ldots, n + ১$ অৰ বাবে, $X = k$ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ব $\frac{(k-১)}{n^২}$, কাৰণ দুটা ধনাত্মক পূৰ্ণসংখ্যাৰ যোগফল k হোৱাৰ $k - ১$ টা উপায় আছে, যথা $১ + (k - ১), ২ + (k - ২), \ldots, (k - ১) + ১$। আকৌ, $k = n + i$, য'ত $i = ২, ৩, \ldots, n$ অৰ বাবে $X = k$ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ব $\frac{n-i+১}{n^২}$, কাৰণ $\{১, ২, \ldots, n\}$ অৰ পৰা লোৱা দুটা সংখ্যাৰ যোগফল k হোৱাৰ $n-i+১$ টা উপায় আছে, যথা $i + n, (i + ১) + (n - ১), \ldots, n + i$. যিহেতু $২ \leq X \leq ২n$, গতিকে,

$$\begin{aligned}
১ &= \sum_{k=২}^{২n} \mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=২}^{n+১} \frac{k-১}{n^২} + \sum_{i=২}^{n} \frac{n-i+১}{n^২} \\
১ &= \left(\frac{১}{n^২} + \frac{২}{n^২} + \cdots + \frac{n}{n^২}\right) + \left(\frac{n-১}{n^২} + \frac{n-২}{n^২} + \cdots + \frac{১}{n^২}\right) \\
n^২ &= (১ + ২ + \cdots + n) + (১ + ২ + \cdots + (n - ১)) \\
n^২ &= ২(১ + ২ + \cdots + n) - n.
\end{aligned}$$

সেয়েহে,

$$১ + ২ + \cdots + n = \frac{n(n+১)}{২}.$$

টোকা ৩. এই প্ৰমাণটো [19] অত প্ৰকাশ পাইছিল।

৫) এটা দ্বি-যোগফল ৰূপত লিখি:

$$\sum_{i=১}^{n} i = \sum_{i=১}^{n} \sum_{k=০}^{i-১} ১ = \sum_{০ \leq k < i \leq n} ১.$$

শেষৰ যোগটো এটা বিন্যাসিক সমস্যা। আমি ইয়াত $০ \leq k < i \leq n$ চৰ্তটো মানি চলাকৈ k, i পূৰ্ণসংখ্যা দুটা বাছি উলিওৱাৰ উপায়ৰ সংখ্যা গণনা কৰিব বিচাৰিছোঁ। কিন্তু সহজভাবেই, সেইটো হৈছে $\binom{n+১}{২}$, কাৰণ ই $\{০, ১, \ldots, n\}$ অৰ পৰা দুটা সংখ্যা বাছি উলিওৱাৰ সমস্যালৈ ৰূপান্তৰিত হয়। আকৌ, $\binom{n+১}{২} = \frac{n(n+১)}{২}$ হোৱা বাবে প্ৰমাণটো ওলাই পৰে।

টোকা ৪. এই পদ্ধতিটো $S_k(n) = ১^k + ২^k + \cdots + n^k$ ৰ বাবে সূত্ৰ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ [18] অত সাধাৰণীকৰণ কৰা হৈছে। উদাহৰণস্বৰূপে, বৰ্গসমূহৰ যোগফলৰ বাবে আমি পাওঁ,

$$\sum_{c \leq n} c^২ = \sum_{c \leq n} \sum_{a \leq c} \sum_{b \leq c} ১ = \sum_{১ \leq a, b \leq c \leq n} ১.$$

অৰ্থাৎ, আমি (a, b, c) ত্ৰয়ীৰ মুঠ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰিব বিচাৰিছোঁ, যাতে $১ \leq a \leq c$ আৰু $১ \leq b \leq c$. আমি এইকেইটা ভাগত ভাগ কৰিব পাৰোঁ: $(a < b < c), (a < b = c), (a = b < c), (a = b = c)$. ইয়াৰ a আৰু b ৰ প্ৰতিসমতাৰ বাবে আমি $(a < b)$ আৰ্হিৰ ভাগকেইটাক ২ ৰে পূৰণ কৰিব পাৰোঁ। তেতিয়া আমি পাওঁ,

$$\sum_{c=১}^{n} c^২ = ২\binom{n}{৩} + ২\binom{n}{২} + \binom{n}{২} + \binom{n}{১} = ২\binom{n}{৩} + ৩\binom{n}{২} + \binom{n}{১}$$
$$= \frac{n}{৬}\left(২(n-১)(n-২) + ৯(n-১) + ৬\right) = \frac{n(n+১)(২n+১)}{৬}.$$

৬) সৃষ্টক ফলন:

ধৰা হওক, $a_n = ১ + ২ + \cdots + n$ আৰু
$$A(n) = \sum_{n=০}^{\infty} a_n x^n.$$

যিহেতু $a_n = a_{n-১} + n$, গতিকে,
$$A(n) = ০ + \sum_{n=১}^{\infty}(a_{n-১} + n)x^n = \sum_{n=১}^{\infty} a_{n-১}x^n + \sum_{n=১}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=০}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=১}^{\infty} nx^n. \qquad (১)$$

আমি পাওঁ, $\sum_{n=০}^{\infty} x^n = \frac{১}{১-x}$, গতিকে,
$$\sum_{n=১}^{\infty} nx^{n-১} = \frac{১}{(১-x)^২}, \qquad (২)$$

যিটোৱে আমাক দিয়ে যে
$$\sum_{n=১}^{\infty} nx^{n-১} = \frac{১}{(১-x)^২}.$$

ইয়াৰ পৰা পোৱা যায় যে
$$\sum_{n=০}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=১}^{\infty} nx^{n-১} = \frac{x}{(১-x)^২}.$$

গতিকে, (১) অৰ প্ৰয়োগে দিয়ে যে
$$A(n) = xA(n) + \frac{x}{(১-x)^২}.$$

সেয়েহে,
$$A(n) = \frac{x}{(১-x)^৩}.$$

কিন্তু, (২) ৰ দুয়োপিনে অৱকলজ উলিয়ালে প্ৰকাশ হয় যে
$$\sum_{n=২}^{\infty} n(n-১)x^{n-২} = \frac{২}{(১-x)^৩}.$$

গতিকে,
$$\frac{x}{(১-x)^৩} = \sum_{n=২}^{\infty} \frac{n(n-১)}{২}x^{n-১} = \sum_{n=১}^{\infty} \frac{n(n+১)}{২}x^n.$$

সেয়েহে, $a_n = \frac{n(n+১)}{২}$.

৭) দুটা পৃথক ধৰণে গণনা কৰি:

$\{১, ২, \ldots, n+১\}$ সংহতিটো লোৱা হওক। এই সংহতিটোৰ পৰা কিমান যোৰ সংখ্যা পোৱা যাব সেয়া আমি দুটা বেলেগ ধৰণে গণনা কৰিম। এক ধৰণেৰে, উত্তৰটো হ'ল $\binom{n+১}{২}$. আনহাতে, ধৰা হওক যোৰটো হৈছে (a, b), যাতে $a < b$. যিহেতু ইহঁত দুটাৰ মাজত b হৈছে আটাইতকৈ ডাঙৰ, গতিকে $২ \leq b \leq n+১$. এতিয়া b টো নিৰ্দিষ্টকৈ ধৰা হওক, তেতিয়া a বাছি লোৱাৰ $b-১$ টা উপায় থাকিব। যিহেতু $২ \leq b \leq n+১$, গতিকে আমি পাম,

$$\binom{n+১}{২} = \sum_{b=২}^{n+১}(b-১) = ১+২+\cdots+n.$$

টোকা ৫. ওপৰৰ প্ৰমাণটো তলত দিয়া ধৰণে সাধাৰণীকৰণ কৰিব পাৰি। ধৰা হওক আমি $\{১, ২, \ldots, n+১\}$ সংহতিটোৰ পৰা $r+১$ টা উপাদান বাছনি কৰিব খুজিছোঁ। একেদৰে আমি পাওঁ, এইটোত $\binom{n+১}{r+১}$ টা ধৰণ আছে। আনহাতে, যদি আমি একোটা $(r+১)-$*উপ-সংহতি*ৰ আটাইতকৈ ডাঙৰ মৌল b টো নিৰ্দিষ্টকৈ ধৰি লওঁ, তেন্তে সেই মৌলটোৱে $r+১ \leq b \leq n+১$ চৰ্তটো মানি চলিব আৰু বাকীবোৰ উপাদান বাছনি কৰাৰ $\binom{b-১}{r}$ টা উপায় থাকিব। গতিকে, আমি পাওঁ, যিটোক বৰদিনৰ মোজা উপপাদ্য (বা হকী দণ্ড অভেদ) বুলি জনা যায়:

$$\binom{r}{r} + \binom{r+১}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+১}{r+১}.$$

৮) অন্তৰ্বেশন (Interpolation):

ধৰা হ'ল, উত্তৰটো এটা দ্বিঘাত ৰাশি: $f(n) = an^২ + bn + c$. তেতিয়া দ্বিঘাত ৰাশিটোৱে এই চৰ্তটো মানিব লাগিব: $f(০) = ০$, গতিকে $c = ০$. ৰাশিটোৱে এই চৰ্ত দুটাও মানিব লাগিব: $f(১) = ১$, $f(২) = ৩$, গতিকে $a + b = ১, ৪a + ২b = ৩$. ইয়াৰ পৰা আমি পাওঁ যে $a = b = ১/২$. সেয়েহে $f(n) = \frac{n^২ + n}{২} = \frac{n(n+১)}{২}$. ইয়াৰ পাছত সিদ্ধান্তত উপনীত হ'বলৈ আৱেশ তত্ত্ব খটুৱাব পাৰি।

৯) অন্তৰ সংকাৰক (Difference Operator):

ধৰা হ'ল, $f(n) = ১+২+\cdots+n$. আমি এই পৌনঃপুনিকটো দেখা পাওঁ: $f(n) = f(n-১) + n$, আৰু সেয়েহে $R(n) = f(n) - f(n-১) = n$, যিটো এটা ৰৈখিক ফলন। কিন্তু $R(n)$ ৰ ঘাত $f(n)$ তকৈ পূৰা-পূৰি এক কম। সেয়েহে $f(n)$ টো ২ ঘাতৰ এটা বহুপদ ৰাশি। ৮-অত প্ৰমাণ কৰা দৰে আমি উলিয়াব পাৰোঁ যে $f(n) = \frac{n^২}{২} + \frac{n}{২}$.

টোকা ৬. $S_k(n) = ১^k + ২^k + \cdots + n^k$ বহুপদটো $k+১$ ঘাতৰ বুলি দেখুৱাবলৈ এই যুক্তিখিনি খটুৱাব পাৰি।

১০) পাস্কেল প্ৰমাণ:

মন কৰিবা যে $(n+১)^২ - n^২ = ২n + ১$। সেয়েহে,

$$\begin{aligned}
(n+১)^২ - n^২ &= ২n+১ \\
n^২ - (n-১)^২ &= ২(n-১)+১ \\
(n-১)^২ - (n-২)^২ &= ২(n-২)+১ \\
&\vdots \\
২^২ - ১^২ &= ২(১)+১.
\end{aligned}$$

গোটেইখিনি যোগ কৰিলে আমি পাওঁ যে বাওঁকাষটো সংক্ষিপ্ত হৈ পৰে, গতিকে,

$$(n+১)^২ - ১ = ২(n + (n-১) + \cdots + ১) + n,$$

সেয়েহে,

$$১ + ২ + \cdots + n = \frac{(n+১)^২ - ১ - n}{২} = \frac{n^২ + n}{২} = \frac{n(n+১)}{২}.$$

টোকা ৭. $S_k(n) = ১^k + ২^k + \cdots + n^k$ ৰ বাবে এটা সূত্ৰ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ এই পদ্ধতিটো সাধাৰণীকৰণ কৰিব পাৰি। তলত দিয়াটো ব্যৱহাৰ কৰি

$$(n+১)^{k+১} - ১ = \sum_{\ell=০}^{k} \binom{k+১}{\ell} S_\ell(n),$$

আৰু সংক্ষিপ্তকৰণটোৰ দ্বাৰা আমি পাস্কেলৰ অভেদটো [14] পাওঁ:

$$S_k(n) = \frac{(n+১)^{k+১} - ১ - \sum_{\ell=০}^{k-১} \binom{k+১}{\ell} S_\ell(n)}{k+১}.$$

১১) গুণোত্তৰ শ্ৰেণী + ল'পিটাল (L'Hospital):

তলৰ অভেদটো লোৱা হওক:

$$\sum_{k=০}^{n} x^k = \frac{১ - x^{n+১}}{১ - x}.$$

দুয়োপিনে অৱকলজ লৈ পোৱা হ'ল:

$$\sum_{k=১}^{n} kx^{k-১} = \frac{-(১-x)(n+১)x^n + (১ - x^{n+১})}{(১-x)^২} = \frac{nx^{n+১} - (n+১)x^n + ১}{(১-x)^২}.$$

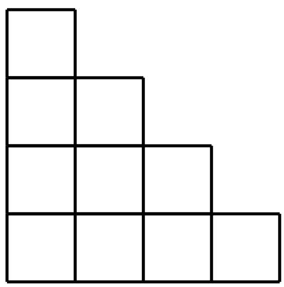
এতিয়া $x \to ১$ লৈ সীমা উলিওৱা হওক। বাওঁপিনে আমি পাম $১ + ২ + \cdots + n$. সোঁপিনে ল'পিটাল নীতি খটুৱাই আমি নিৰ্ণয় কৰিব পাৰোঁ,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to ১} \frac{nx^{n+১} - (n+১)x^n + ১}{(১-x)^২} &= \lim_{x\to ১} \frac{n(n+১)x^n - (n+১)nx^{n-১}}{-২(১-x)} \\
&= \lim_{x\to ১} \frac{n^২(n+১)x^{n-১} - (n+১)n(n-১)x^{n-২}}{২} \\
&= \frac{n(n+১)}{২}(n - (n-১)) = \frac{n(n+১)}{২}.
\end{aligned}$$

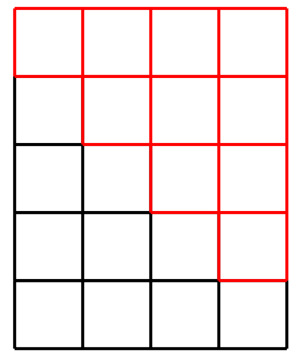
টোকা ৮. এই প্ৰমাণটোৰ প্ৰস্তাৱ দ্বিতীয়জন সহ-লেখকক ষ্টিভেন জে. মিল্লাৰে (Steven J. Miller) দিছিল। উচ্চ ঘাতৰ বাবে এই পদ্ধতিখিনি সাধাৰণীকৰণ কৰিব পাৰি।

১২) ক্ষেত্ৰফল প্ৰমাণ:

কল্পনা কৰা যে প্ৰতিটো সংখ্যা k ক k টা একক বৰ্গৰ শাৰীৰে চিত্ৰিত কৰা হৈছে। তেতিয়া $১ + ২ + \cdots + n$ যোগটোৱে চিত্ৰ ১-অত দেখুওৱা ত্ৰিভুজৰ দৰে এটা আকৃতি গঠন কৰিব। যদি আমি ইয়াৰ এটা প্ৰতিলিপি লৈ পাক ঘূৰাই দিওঁ, আৰু দুয়োটা লগ লগাই দিওঁ, তেন্তে আমি চিত্ৰ ২-ত দেখুওৱা দৰে এটা $n \times (n + ১)$ আয়তক্ষেত্ৰ পাম। গতিকে, সামগ্ৰিক ক্ষেত্ৰফল হ'ল $n(n + ১)/২$.



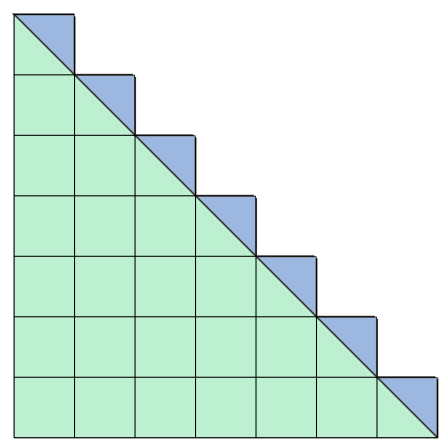
চিত্ৰ - ১: এক ধৰণৰ আকৃতিৰ ক্ষেত্ৰফল ৰূপে যোগটো।



চিত্ৰ - ২: দুয়োটা অংশই এটা আয়ত গঠন কৰিছে।

১৩) আন এটা ক্ষেত্ৰফল প্ৰমাণ:

১২ নং প্ৰমাণৰ দৰে আমি ইয়াত চিত্ৰ ১ অৰ ক্ষেত্ৰফল নিৰ্ণয় কৰিম। চিত্ৰ ৩ ত আমি দেখোঁ যে $\frac{n^২}{২}$ ক্ষেত্ৰফলৰ এটা ত্ৰিভুজ আছে আৰু ১/২ ক্ষেত্ৰফলৰ n টা ত্ৰিভুজ আছে। গতিকে মুঠ ক্ষেত্ৰফলটো হ'ল $\frac{n^২ + n}{২}$.



চিত্ৰ - ৩: ক্ষেত্ৰফললৈ লক্ষ্য কৰি প্ৰমাণ।

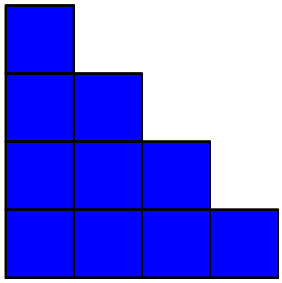
১৪) আন এটা ক্ষেত্ৰফল প্ৰমাণ:

এই চিত্ৰটোৰ প্ৰস্তাৱ বব পেলেই(Bob Palais)-এ দিছিল। পুনৰ ধৰা হওক, প্ৰতিটো সংখ্যা k ক k টা একক বৰ্গৰ শাৰীৰে বুজোৱা হৈছে যাতে $১ + ২ + \cdots + n$ যোগটোৱে চিত্ৰ ৪-ত দেখুওৱা ত্ৰিভুজীয় সজ্জাটো গঠন কৰে। যদি আমি দুটা প্ৰতিলিপি ব্যৱহাৰ কৰোঁ আৰু কৰ্ণত বৰ্গসমূহ যোগ কৰোঁ, তেন্তে আমি চিত্ৰ ৫-অৰ দৰে এটা $(n + ১) \times (n + ১)$ বৰ্গ পাম। এই চিত্ৰটোৱে দেখুৱায় যে

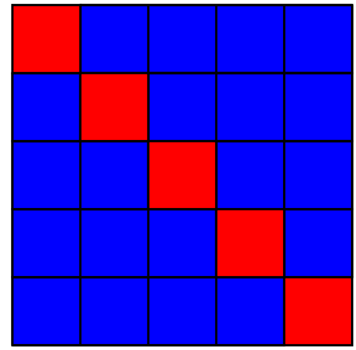
$$(n + ১)^২ = ২\sum_{i=১}^{n} i + (n + ১)$$

$$২\sum_{i=১}^{n} i = (n + ১)^২ - (n + ১) = n^২ + n.$$

এই ছবি আৰু প্ৰমাণটো ওপৰত দিয়া পাস্কেল প্ৰমাণৰ লগত জড়িত।



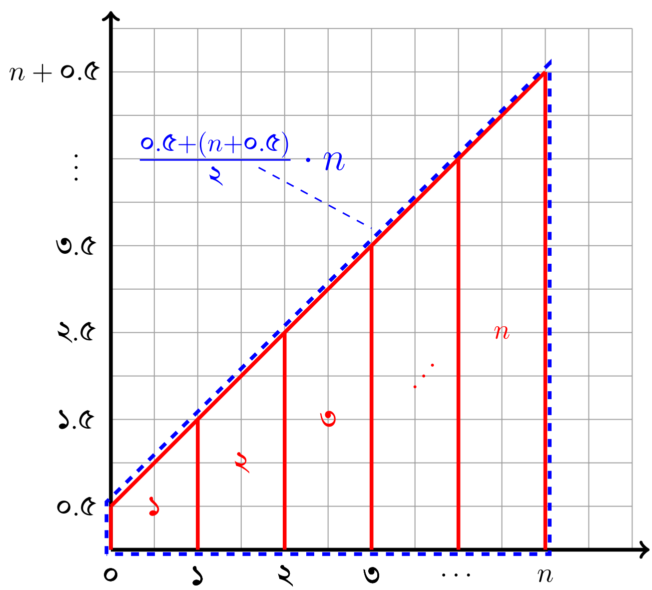
চিত্ৰ - ৪: এক ধৰণৰ আকৃতিৰ ক্ষেত্ৰফল ৰূপে যোগটো।



চিত্ৰ - ৫: দুটা সজ্জা আৰু এটা শাৰীয়ে এটা বৰ্গ গঠন কৰিছে।

১৫) ট্ৰেপিজিয়ামৰ কালি:

চিত্ৰ ৬ ত এটা ট্ৰেপিজিয়ামৰ কালি দুটা ধৰণে নিৰ্ণয় কৰাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি এটা শব্দবিহীন প্ৰমাণ আছে। এই চিত্ৰটো গেছপাৰৰ [6] পৰা লোৱা হৈছে।



চিত্ৰ - ৬: ট্ৰেপিজিয়ামটোৰ কালি।

১৬) ট্ৰেপিজিয়ামৰ কালিৰ সমাকলন সংস্কৰণ:

বিতংভাবে [6] ত দিয়া অনুসৰি, ১৫ নং প্ৰমাণটো তলত দিয়া ধৰণে সমাকলন যুক্ত প্ৰমাণলৈ ৰূপান্তৰ কৰিব পাৰি: $k \geq ১$ অৰ বাবে আমি পাওঁ,

$$\int_{k-১}^{k}\left(\frac{১}{২}+x\right)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x+x^{২}}{২}\right)\Big|_{k-১}^{k} = k.$$

সেয়েহে,

$$\int_০^n \left(\frac{১}{২}+x\right)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=১}^{n}\int_{k-১}^{k}\left(\frac{১}{২}+x\right)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=১}^{n} k.$$

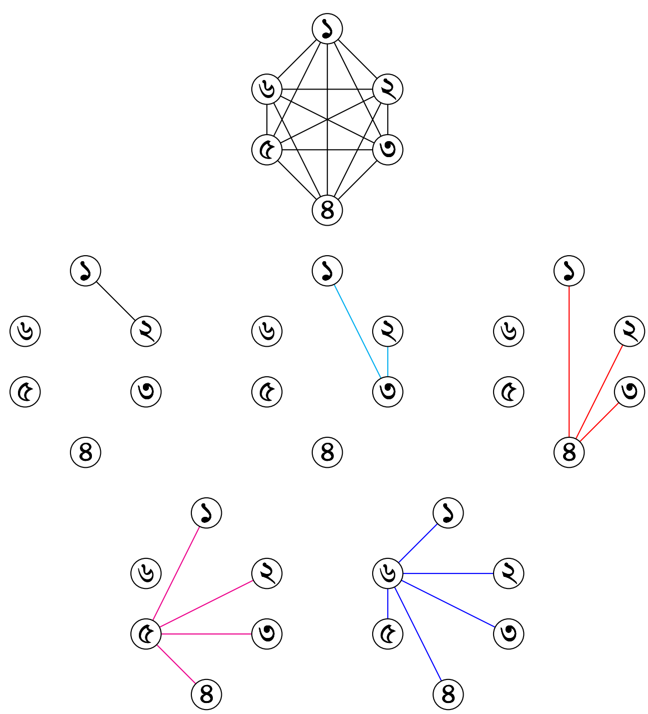
কিন্তু,

$$\int_০^n \left(\frac{১}{২}+x\right)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x+x^২}{২}\right)\Big|_০^n = \frac{n^২+n}{২}.$$

১৭) এটা কোঠাৰ কৰমৰ্দনসমূহ:

ধৰা, এটা কোঠাত $n+১$ জন মানুহ আছে আৰু প্ৰতি যোৰা মানুহে পৰস্পৰক এটাকৈ কৰমৰ্দন দি অভিবাদন জনাইছে। এইদৰে মুঠতে কিমান সংখ্যক কৰমৰ্দন হ'ব সেইটো দুটা ধৰণে গণনা কৰি আমি উত্তৰটো উলিয়াম। একধৰণে, ইয়াত $\binom{n+১}{২}$ টা কৰমৰ্দন থাকিব লাগিব, কাৰণ প্ৰতিটো যোৰাৰ বাবে এটা কৰমৰ্দন আছে। আনধৰণে, যদি আমি মানুহকেইজনক $P_১, P_২, \ldots, P_{n+১}$ বুলি নামকৰণ কৰোঁ, আৰু আমি ক্ৰমিকভাৱে গণনা কৰোঁ, তেন্তে আমি দেখিম যে $P_১$ এ n টা কৰমৰ্দন দিছে, $P_২$ এ অন্য $n-১$ টা কৰমৰ্দন দিছে ($P_১$ অৰ সৈতে দিয়া কৰমৰ্দনটো ইতিমধ্যে গণনা কৰা হ'ল), $P_৩$ এ অন্য $n-২$ টা কৰমৰ্দন দিছে, ইত্যাদি। গতিকে, $\binom{n+১}{২} = n+(n-১)+\cdots+১.$

আমি দেখোঁ যে, এই প্ৰমাণটো $n+১$ টা শীৰ্ষবিন্দু যুক্ত পূৰ্ণ লেখ (complete graph) $K_{n+১}$ অৰ বাহুৰ সংখ্যা গণনাৰ সমতুল্য। [3] ৰ ভিত্তিত, ওপৰৰ যুক্তিখিনিৰ ধাৰণাটোৰ এটা নক্সা $n=৫$ অৰ বাবে চিত্ৰ ৭ অত দিয়া হৈছে।



চিত্ৰ - ৭: n টা শীৰ্ষবিন্দু যুক্ত পূৰ্ণ লেখৰ বাহুৰ গণনা।

১৮) তৰা আৰু দণ্ড প্ৰমাণ:

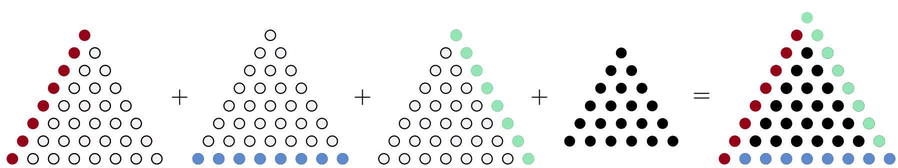
আমি $x_১ + x_২ + x_৩ = n - ১$ সমীকৰণটোৰ সমাধান উলিয়াব খুজিছোঁ য'ত $x_১, x_২, x_৩ \geq ০$. আমি $n - ১$ টা তৰা আৰু ২ ডাল দণ্ডৰে গঠিতে একোটা শব্দ কল্পনা কৰিব পাৰোঁ। $x_১$ হৈছে প্ৰথমডাল দণ্ডৰ আগৰ তৰাসমূহৰ সংখ্যা, $x_২$ হৈছে প্ৰথমডাল আৰু দ্বিতীয়ডাল দণ্ডৰ মাজৰ তৰাৰ সংখ্যা, আৰু $x_৩$ হৈছে দ্বিতীয়ডাল দণ্ডৰ পিছৰ তৰাৰ সংখ্যা। উদাহৰণস্বৰূপে, যেতিয়া $n = ৫$, তেতিয়া আমি পাম যে $\star | \star\star\star | \star$ এ $x_১ = ১$, $x_২ = ৩$, $x_৩ = ১$ বুজাইছে, আৰু $\star || \star\star\star\star$ এ $x_১ = ১$, $x_২ = ০$, $x_৩ = ৪$ বুজাইছে। আমি দেখোঁ যে, $n - ১$ টা তৰা আৰু ২ ডাল দণ্ডৰে গঠিত শব্দসমূহৰ সংখ্যা আৰু $x_১ + x_২ + x_৩ = n - ১$ সমীকৰণৰ অঋণাত্মক অখণ্ড সমাধানসমূহৰ মাজত এটা একৈকী-আচ্ছাদিত সম্পৰ্ক আছে। সেয়েহে, মুঠ সমাধানৰ সংখ্যা $\binom{n+১}{২}$. ইয়াক আন এক ধৰণেও গণনা কৰিব পাৰোঁ। $x_১$ ক নিৰ্দিষ্টকৈ লোৱা হ'ল। এতিয়া, $x_২ + x_৩ = n - ১ - x_১$. যেতিয়া $x_২$ টো ০ আৰু $n - ১ - x_১$ ৰ মাজৰ কোনোবা এটা বাছি লোৱা হয়, তেতিয়া $x_৩$ টো নিৰ্দিষ্ট হৈ থাকিব। গতিকে, প্ৰতিটো $x_১$ অৰ কাৰণে, $x_১ + x_২ + x_৩ = n - ১$ সমীকৰণটোৰ $n - x_১$ টা সমাধান থাকে। কিন্তু $০ \leq x_১ \leq n - ১$, গতিকে আমি পাওঁ যে মুঠ সমাধানৰ সংখ্যা $(n - ০) + (n - ১) + \cdots + (n - (n - ১)) = n + (n - ১) + \cdots + ১$.

১৯) পৌনঃপুনিক সম্পৰ্কৰ জৰিয়তে:

প্ৰথমে মনকৰিবলীয়া কথাটো হ'ল এই যে $t_n := ১ + ২ + ৩ + \cdots + n$ অনুক্ৰমটোৱে এটা ৰৈখিক সমমাত্ৰিক পৌনঃপুনিক (linear homogeneous recurrence) সিদ্ধি কৰে।

উপপাদ্য ৯. ত্ৰিভুজীয় সংখ্যা, $t_n := ১ + ২ + ৩ + \cdots + n$ বোৰে, এই পৌনঃপুনিকটো সিদ্ধি কৰে: $t_n = ৩t_{n-১} - ৩t_{n-২} + t_{n-৩}$.

প্ৰমাণ.



$\square$

ওপৰৰ চিত্ৰৰে প্ৰমাণটো এডগাৰৰ [5] পৰা আহিছে।

ই বুজায় যে, অনুক্ৰমটোৰ লক্ষণ-নিৰ্দেশক সমীকৰণটো হ'ল $x^৩ - 3x^২ + ৩x - ১ = (x - ১)^৩ = ০$. যিহেতু ইয়াৰ তিনিটা পুনৰাবৃত্ত সমাধান $x = ১$ আছে, আমি পাওঁ যে

$$t_n = a(১)^n + bn(১)^n + cn^২(১)^n.$$

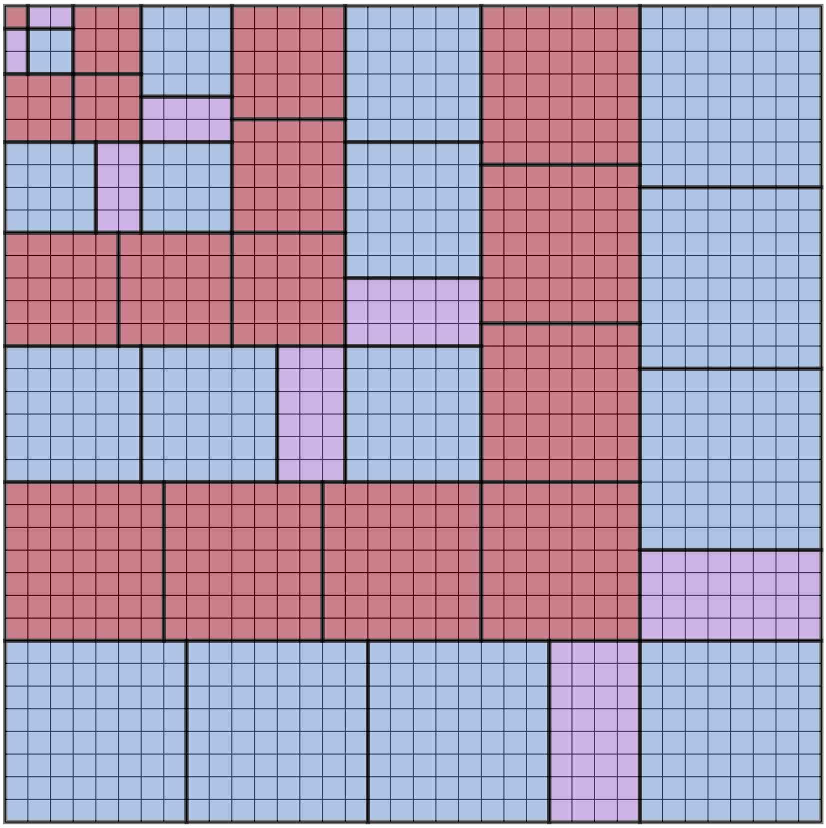
এতিয়া ৮ নং প্ৰমাণৰ দৰে প্ৰমাণটো পোৱা যাব, অৰ্থাৎ $t_০ = ০$, $t_১ = ১$ আৰু $t_২ = ৩$ তথ্যকেইটা ব্যৱহাৰ কৰি আমি দেখোঁ যে $a = ০$, $b = \frac{১}{২}$ আৰু $c = \frac{১}{২}$.

২০) ঘনকৰ যোগৰ জৰিয়তে:

আমি তলত দিয়াটো ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰিম,

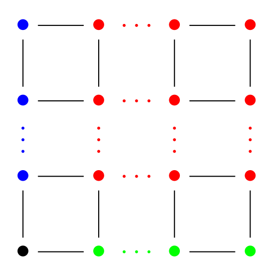
$$(১ + ২ + ৩ + \cdots + n)^২ = ১^৩ + ২^৩ + ৩^৩ + \cdots + n^৩. \qquad (৩)$$

জে. বেৰী লভে [11] দিয়া, ইয়াৰ এটা বিখ্যাত চিত্ৰ-প্ৰমাণ আছে। লভৰ নক্সাটো চিত্ৰ ৮ অত দিয়া হৈছে (আমি পুনৰ্অংকিত কৰা)।



চিত্ৰ - ৮: $\sum_{k=১}^{n} k^৩ = \left(\sum_{k=১}^{n} k\right)^২$ ৰ প্ৰমাণ।

এতিয়া আমি $(n+১)\times(n+১)$ জালিকা এখনৰ ভিতৰত থকা আয়তক্ষেত্ৰৰ সংখ্যা দুটা ধৰণে গণনা কৰিম। ধৰা হওক, $n \times n$ জালিকা এখনত থকা আয়তক্ষেত্ৰৰ সংখ্যা R_n; সেয়েহে, $R_১ = ০$, $R_২ = ১$, $R_৩ = ৯$, আৰু $R_৪ = ৩৬$.



ধৰা হওক, $n > ১$. আমি $(n+১)\times(n+১)$ জালিকা এখনৰ সোঁপিনে ওপৰৰ চুকত $n \times n$ জালিকা এখন থকা কথাটো ব্যৱহাৰ কৰিম। আমি একেবাৰে বাওঁফালৰ স্তম্ভৰ বিন্দুবোৰত নীলা আৰু তলৰ শাৰীৰ বিন্দুবোৰত সেউজীয়া ৰং দিছোঁ, মাথোঁ বাওঁফালৰ তলৰ চুকৰ বিন্দুটো বাদ দিয়া হৈছে, যিটো আমি ক'লা কৰি ৰাখিছোঁ। মন কৰা যে, একোটা আয়তে *এটা বিন্দু ব্যৱহাৰ কৰিছে* বুলি আমি ক'ম, যদিহে সেই বিন্দুটো আয়তটোৰ চুকত থাকে।

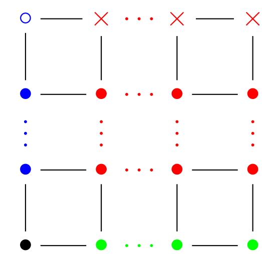
এই আৰ্হিটোত $(n+১)\times(n+১)$ জালিকাত এখন $n \times n$ জালিকা থাকে যাৰ বিন্দুবোৰ ৰঙা কৰা হৈছে আৰু গোটেই জালিকাখনত মুঠতে $n^২$ টা ৰঙা বিন্দু, n টা নীলা বিন্দু, n টা সেউজীয়া বিন্দু, আৰু এটা ক'লা বিন্দু আছে।

এতিয়া, আমি জানো যে ৰঙা বিন্দুৰ জালিকাখনত সম্পূৰ্ণৰূপে R_n টা আয়ত সন্নিবিষ্ট হৈ আছে। আকৌ, বাকী

আয়তবোৰ তিনিটা সুকীয়া আৰু ওপৰা-ওপৰি নোহোৱা ভাগত থাকিব: দুটা নীলা আৰু দুটা ৰঙা বিন্দু থকা আয়তবোৰ, দুটা সেউজীয়া আৰু দুটা ৰঙা বিন্দু থকা আয়তবোৰ, আৰু ক'লা বিন্দুটো ব্যৱহাৰ কৰা আয়তবোৰ। লগতে আমি তলত দিয়া গুৰুত্বপূৰ্ণ পৰ্যবেক্ষণটোও মন কৰিম।

* দুটা নীলা আৰু দুটা ৰঙা বিন্দু ব্যৱহাৰ কৰা আয়তসমূহৰ সংখ্যা, দুটা সেউজীয়া আৰু দুটা ৰঙা বিন্দু ব্যৱহাৰ কৰা আয়তসমূহৰ সংখ্যাৰ সৈতে সমান।

এতিয়া আমি প্ৰথমে দুটা নীলা আৰু দুটা ৰঙা বিন্দু ব্যৱহাৰ কৰা আয়তৰ সংখ্যা গণনা কৰিব লাগিব। আমি দেখোঁ যে, প্ৰতিটো নীলা বিন্দুৰ বাবে সম্ভাব্য আয়ত এটা পাবলৈ আমি তাৰ বিপৰীত চুকত থকা ৰঙা বিন্দু নিৰ্ধাৰণ কৰিব লাগিব। এটা নীলা বিন্দু নিৰ্দিষ্টকৈ লোৱা হ'ল। তেতিয়া, একোটা আয়ত পাবলৈ বিপৰীত চুকত $n\cdot(n-১)$ টা ৰঙা বিন্দু বাছনি কৰিব পৰা যাব। উদাহৰণস্বৰূপে, যদি আমি ওপৰৰ নীলা বিন্দু $\circ$ টো নিৰ্দিষ্টকৈ লৈ লওঁ, তেন্তে আমি ওপৰৰ শাৰীৰ কোনো এটাও ৰঙা বিন্দু আয়তৰ বিপৰীত চুক হিচাপে ব্যৱহাৰ কৰিব নোৱাৰোঁ। যাৰ ফলত জালিকাখনৰ $n\times(n-১)$ টা ৰঙা বিন্দু আয়তৰ আনটো চুক হিচাপে ল'বলৈ আমাৰ হাতত থাকিব।



যিহেতু n টা নীলা বিন্দু আছে, গতিকে দুটা নীলা আৰু দুটা ৰঙা বিন্দু ব্যৱহাৰ কৰি $n\cdot n\cdot(n-১)$ টা আয়তক্ষেত্ৰ আমি প্ৰাৰম্ভিকভাবে পাম। কিন্তু, প্ৰতিটো আয়তক্ষেত্ৰই দুটা নীলা বিন্দু ব্যৱহাৰ কৰে আৰু সেয়েহে প্ৰতিটো আয়তক্ষেত্ৰক দুবাৰকৈ গণনা কৰা হৈছে। গতিকে, দুটা নীলা আৰু দুটা ৰঙা বিন্দু ব্যৱহাৰ কৰা আয়তক্ষেত্ৰ সম্পূৰ্ণ সঠিকভাবে মুঠতে $\frac{n\cdot n\cdot(n-১)}{২}$ টা আছে। অৰ্থাৎ, দুটা সেউজীয়া আৰু দুটা ৰঙা বিন্দু ব্যৱহাৰ কৰা আয়তক্ষেত্ৰও মুঠতে $\frac{n\cdot n\cdot(n-১)}{২}$ টা আছে।

শেষত, আমি ক'লা বিন্দুটো ব্যৱহাৰ কৰা আয়তক্ষেত্ৰৰ সংখ্যা গণনা কৰোঁ। কিন্তু এইটো পোনপটীয়া, কাৰণ ক'লা বিন্দুটো আয়তক্ষেত্ৰৰ বাওঁফালৰ তলৰ চুকটোত থাকিবই লাগিব। গতিকে আমি $n^২$ টা ৰঙা বিন্দুৰ পৰা কেৱল সোঁপিনৰ ওপৰৰ চুকটোৰ বাবে এটা বাছনি কৰিলেই হ'ব, সেয়েহে $n^২$ টা আয়তক্ষেত্ৰ পোৱা যাব।

গোটেই কথাখিনি লগ লগাই আমি পাওঁ যে

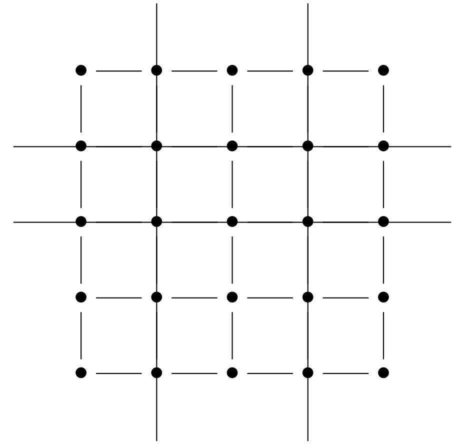
$$\begin{aligned} R_{n+১} &= R_n + \frac{n\cdot n\cdot(n-১)}{২} + \frac{n\cdot n\cdot(n-১)}{২} + n^২ \\ &= R_n + n\cdot n\cdot(n-১) + n^২ \\ &= R_n + n^৩ - n^২ + n^২ \\ &= R_n + n^৩. \end{aligned}$$

গতিকে এতিয়া আমি এটা সূত্ৰ লাভ কৰিলোঁ যে R_n জনা থাকিলে $R_{n+১}$ টোও পোৱা যাব। যি নেকি আমাক $R_{n+১} = R_n + n^৩$ পৌনঃপুনিক সম্পৰ্কটো দিলে। আকৌ, $R_২ = ১ = ১^৩$, গতিকে আমি পাওঁ যে

$$R_{n+১} = ১^৩ + ২^৩ + \cdots + n^৩.$$

এতিয়া, $R_{n+১}$ ক অন্য এটা ধৰণেৰে নিৰ্ণয় কৰা হওক:

কাষৰ চিত্ৰটোত আমি দেখোঁ যে, যদি আমি যিকোনো দুটা স্তম্ভ (চিত্ৰত পাৰ হৈ যোৱা থিয় ৰেখা দুডাল) বাছি লওঁ আৰু যিকোনো দুটা শাৰী (চিত্ৰত পাৰ হৈ যোৱা পথালি ৰেখা দুডাল) বাছি লওঁ, তেন্তে আমাৰ এই চাৰিটা বাছনিৰ দ্বাৰা আমি এটা নিৰ্দিষ্ট আয়তক্ষেত্ৰ পাম। তদুপৰি, জালিকাখনৰ ভিতৰৰ প্ৰতিটো আয়তক্ষেত্ৰক এইদৰে গঠন কৰিব পাৰি। এখন $(n+১)\times(n+১)$ জালিকাত $n+১$ টা স্তম্ভ আৰু $n+১$ টা শাৰী আছে। আমি পাওঁ, $n+১$ টা স্তম্ভৰ (বা শাৰীৰ) পৰা ২ স্তম্ভ (বা শাৰী) বাছনি কৰাৰ $\binom{n+১}{২}$ টা উপায় আছে। গতিকে আমি এই সিদ্ধান্তটো পাওঁ যে



$$R_{n+১} = \binom{n+১}{২} \cdot \binom{n+১}{২} = \binom{n+১}{২}^{২}.$$

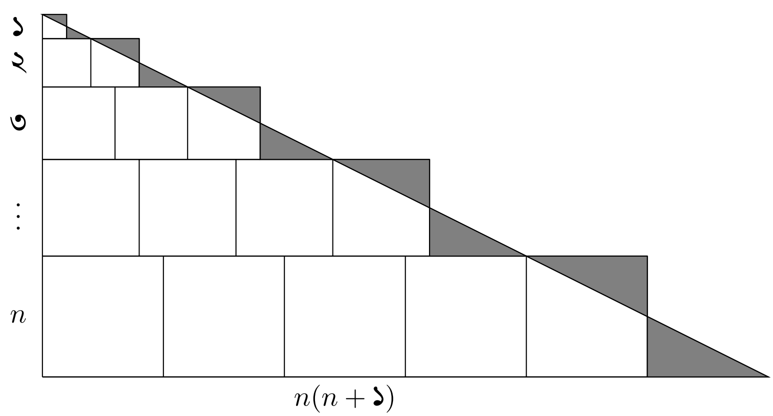
সেয়েহে,

$$(১+২+৩+\cdots+n)^{২} = ১^{৩}+২^{৩}+৩^{৩}+\cdots n^{৩} = R_{n+১} = \binom{n+১}{২}^{২}.$$

ইয়াৰ বৰ্গমূল লৈ আমি ফলাফলটো লাভ কৰোঁ।

২১) ৰৈখিক ফলনৰ জৰিয়তে:

তলৰ চিত্ৰত দেখুওৱা $f(x) = -\frac{১}{২}x + (১+২+৩+\cdots+n)$ ফলনটো লোৱা হওক।



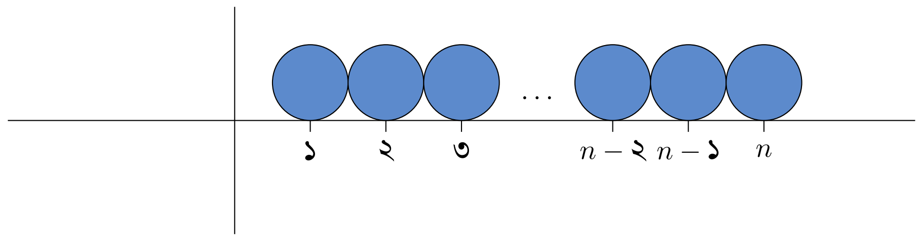
চিত্ৰৰ পৰা আমি পাওঁ যে x-ছেদাংশটো $(n(n+১), ০)$, গতিকে $০ = f(n(n+১)) = -\frac{১}{২}(n(n+১)) + (১+২+৩+\cdots+n)$. এই চিত্ৰ-প্ৰমাণটো গিঅৰ্ক শ্ৰাগেৰ [16] পৰা পোৱা গৈছে।

২২) ভৰকেন্দ্ৰৰ জৰিয়তে:

ধৰা হ'ল, $\{w_j\}_{j=1}^{n}$ হৈছে কেইটামান বস্তুৰ সংহতি, য'ত w_j ৰ ভৰ m_j আৰু বাস্তৱ-সমতলৰ (x_j, y_j) স্থানাংকত ৰখা হৈছে। গোটেই বস্তুখিনিৰ অৱস্থানটোৰ ভৰকেন্দ্ৰৰ স্থানাংক $(\overline{x}, \overline{y})$ হ'লে,

$$\overline{x} = \frac{\sum_{j=১}^{n} m_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} m_j} \text{ আৰু } \overline{y} = \frac{\sum_{j=১}^{n} m_j y_j}{\sum_{j=১}^{n} m_j}.$$

এই স্থানাংক দুটাক ক্ৰমে x-মাধ্যমান আৰু y-মাধ্যমান বুলি কোৱা হয়। এতিয়া ধৰা হ'ল, প্ৰতিটো বস্তু w_j ৰ ভৰ $m_j = ১$ আৰু চিত্ৰত দেখুওৱাৰ দৰে $(j, ০.৫)$ স্থানাংকত আছে।



যিহেতু ভৰসমূহ অভিন্ন, গতিকে আমি জানো যে x-মাধ্যমানটো ভৰৰ মধ্যবিন্দুত থাকিব, যিটো হৈছে $\frac{n+১}{২}$. আকৌ, ওপৰৰ সূত্ৰ মতে, x-মাধ্যমানটো হ'ব $\frac{\sum_{j=১}^{n} j}{\sum_{j=১}^{n} ১} = \frac{১+২+৩+\cdots+n}{n}$. গতিকে আমি পাওঁ,

$$\frac{১+২+৩+\cdots+n}{n} = \frac{n+১}{২},$$

আৰু দুয়োপিনে n ৰে পূৰণ কৰি ফলাফলটো পাওঁ।

এই প্ৰমাণটো ট্ৰীবিৰ [17] পৰা পোৱা গৈছে।

২৩) আবেলৰ ৰূপান্তৰৰ জৰিয়তে (অংশ অনুসৰি যোগ):

তলৰ ফলটো আবেলৰ ৰূপান্তৰ বা অংশ অনুসৰি যোগ বুলি জনা যায়।

উপপাদ্য ১০. ধৰা, $(a_১, a_২, a_৩, \ldots)$ আৰু $(b_১, b_২, b_৩, \ldots)$ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ দুটা অনুক্ৰম, আৰু ধৰা $n \in \mathbb{N}$. যদি $B_i := b_১ + b_২ + \cdots + b_i$, তেন্তে

$$\sum_{k=১}^{n} a_k b_k = B_n a_n - \sum_{k=১}^{n-১} B_k (a_{k+১} - a_k).$$

ইয়াৰ এটা চিত্ৰ-প্ৰমাণৰ বাবে [2] চোৱা।

যদি আমি ধৰোঁ $a = (১, ২, ৩, ৪, \ldots)$ আৰু $b = (১, ১, ১, ১, \ldots)$, তেন্তে আমি পাম $B = (১, ২, ৩, ৪, \ldots)$ আৰু সেইকাৰণে সকলো k ৰ বাবে $B_k = k$, $a_k = k$ আৰু $b_k = ১$। ইয়াত আবেলৰ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ,

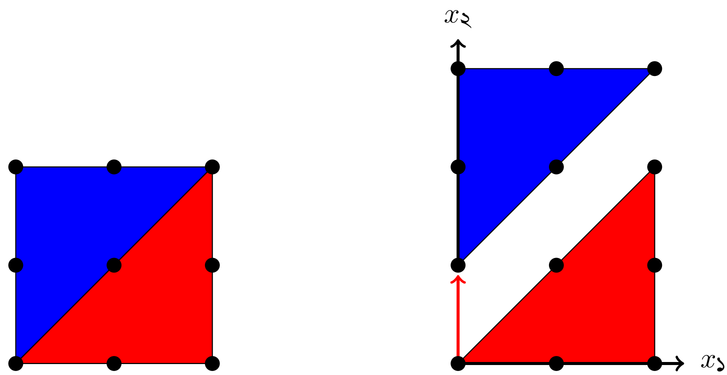
$$\sum_{k=১}^{n} k \cdot ১ = n \cdot n - \sum_{k=১}^{n-১} k((k+১) - k) = n^২ + n - \sum_{k=১}^{n} k \cdot (১).$$

বা

$$২ \sum_{k=১}^{n} k = n^২ + n.$$

২৪) ক্ৰমবিন্যাস প্ৰয়োগ কৰি:

এই প্ৰমাণটো [12] অৰ পৰা পোৱা গৈছে। $[০, n-১]\times[০, n-১]$ বৰ্গটো দুটা ত্ৰিভুজলৈ বিভংগন কৰা হ'ল। যি দুয়োটা ত্ৰিভুজ চিত্ৰ ৯ ত দেখুওৱা দৰে $\{১, ২\}$ ৰ এক বিন্যাস $\sigma = \begin{pmatrix} ১ & ২ \\ \sigma_১ & \sigma_২ \end{pmatrix}$ ৰ বাবে $x_{\sigma_১} \geq x_{\sigma_২}$ অসমতাৰ দ্বাৰা $\mathbb{R}^২$ ত দিয়া হৈছে। মন কৰা যে চিত্ৰ ৯ ত, ৰঙা ত্ৰিভুজটো $\sigma = ১$ অৰ অনুৰূপ আৰু নীলা ত্ৰিভুজটো $\sigma = (১২)$ ৰ অনুৰূপ। σ ৰ অনুৰূপৰ একোটা ত্ৰিভুজ এনেদৰে স্থানান্তৰিত কৰা যাতে, ভেক্টৰৰ i-উপাংশটো σ ৰ (ji) inversion-সমূহৰ সংখ্যাই দিব য'ত $j < i$. ৰঙা ত্ৰিভুজটো ঠাইতে থাকিব $(\sigma = ১)$ আৰু নীলা ত্ৰিভুজটো ১ স্থানান্তৰিত হ'ব। দুয়োটা স্থানান্তৰিত ত্ৰিভুজৰ জালিকা-বিন্দুসমূহে (lattice points) $n(n+১)$ টা জালিকা-বিন্দু দখল কৰিব। যিহেতু প্ৰতিটো ত্ৰিভুজে $১ + ২ + \cdots + n$ টা জালিকা-বিন্দু দখল কৰে, গতিকে আমি পাওঁ $২(১ + ২ + \cdots + n) = n(n + ১)$.



চিত্ৰ - ৯: এটা বৰ্গ দুটা ত্ৰিভুজলৈ বিভংগন।

টোকা ১১. এই প্ৰমাণটো মূলতঃ ১২ নং প্ৰমাণৰ সৈতে একে। অৱশ্যে, প্ৰমাণটো এইদৰে পৰ্যবেক্ষণ কৰিলে, কেইটামান সুন্দৰ সাধাৰণীকৰণ পোৱা যায়। উদাহৰণস্বৰূপে, $[০, n-১]^৩$ ঘনকটোক ছটা চিমপ্লেক্সলৈ (simplex) বিভংগন কৰি, বিন্যাসৰ ভিত্তিত, মাৰ্ক' আৰু লিৎভিন'ভে [12] এটা সুন্দৰ প্ৰমাণ দিছে যে

$$৬\sum_{i=১}^{n}\sum_{j=১}^{i} j = n(n+১)(n+২).$$

২৫) চিমপ্লেক্সৰ জালিকা-বিন্দুত লেবেল:

এই প্ৰমাণটোৱো [12] ৰ পৰা আহিছে। ধৰা হ'ল, S_n^k এ $\mathbb{R}^k$ ত k-মাত্ৰিক চিমপ্লেক্স বুজায় যাৰ শীৰ্ষবিন্দু $V_০ = (০, \dots, ০)$ আৰু $V_n^i = (n-১, \dots, n-১, ০, \dots, ০)$, য'ত $i = ১, ২, \dots, k$ আৰু ইয়াত V_n^i ৰ প্ৰথম i টা স্থানাংকত $n-১$ থাকে। এতিয়া $S_n^১$ অক লোৱা হ'ল, অৰ্থাৎ যাৰ বিন্দুসমূহ হ'ল $V_০ = (০)$ আৰু $V_n^১ = (n-১)$. এই চিমপ্লেক্সটো ০ ৰ পৰা $n-১$ লৈ এডাল ৰেখাখণ্ড মাথোঁ। ইয়াত n টা জালিকা-বিন্দু আছে। এতিয়া, প্ৰতিটো জালিকা-বিন্দুক দুটা মানেৰে লেবেল দিয়া হ'ল: $i+১$ আৰু $n-i$. এই লেবেল হিচাপে ১ অৰ পৰা n লৈ প্ৰতিটো সংখ্যা দুবাৰকৈ থাকিব। সেয়েহে, লেবেলৰ যোগফলটো হ'ব $২(১ + ২ + \cdots + n)$. কিন্তু, প্ৰতিটো জালিকা-বিন্দুত লেবেলসমূহৰ যোগফল $n+১$ আৰু মুঠতে n টা জালিকা-বিন্দু আছে, গতিকে মুঠ যোগফল $n(n+১)$. সেয়েহে, $১ + ২ + \cdots + n = \frac{n(n+১)}{২}$.

টোকা ১২. এই প্ৰমাণটো গাউছৰ কৌশলটোৰ এক কঠিন প্ৰণালী। প্ৰতিটো জালিকা-বিন্দুত দুটা লেবেল দিয়াৰ ধাৰণাটোৰ এটা সুন্দৰ সাধাৰণীকৰণ আছে। যথা, মাৰ্ক' আৰু লিৎভিন'ভে $S_n^২$ চিম্পলেক্সত থকা জালিকা-বিন্দুবোৰত তিনিটা মান ধাৰ্য্য কৰিছিল যাতে যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোৰ a, b ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰিব পাৰি যে

$$৩\sum_{i=১}^{n}(a\,i^২ + b\,i) = ((২n+১)a + ৩b)\,\frac{n(n+১)}{২}.$$

মন কৰা যে $a = ১, b = ০$ ল'লে প্ৰথম n টা বৰ্গৰ যোগফলৰ সূত্ৰটো উদঘাটিত হয়।

২৬) বৰ্গৰ মডুলো ৮ অৰ জৰিয়তে:

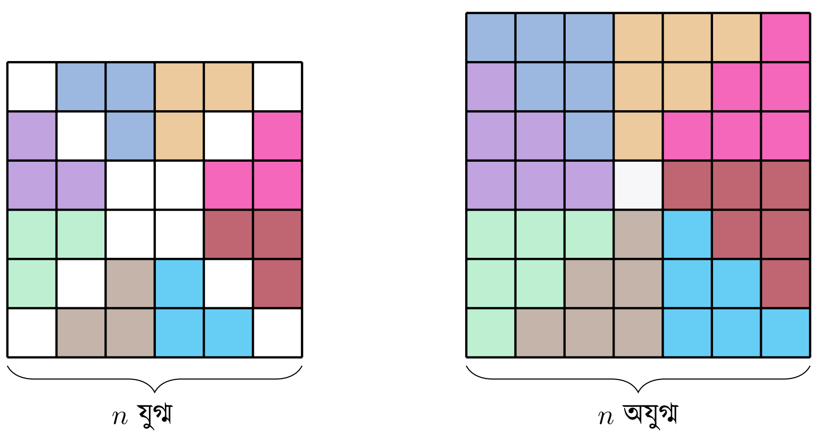
প্ৰতিটো পূৰ্ণবৰ্গ সংখ্যাই ৮ অৰ মডুলো হিচাপে ০ বা ১ বা ৪ ৰ সৰ্বসম (congruent)। এই উপপাদ্যটোৰ এক ধ্ৰুপদী চিত্ৰীয় প্ৰমাণ লেনডাউবাৰে [8, 9] দিছে।

উপপাদ্য ১৩. যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা $n \geq ১$ ৰ বাবে,

$$n^২ = \begin{cases} ৮t_k + ১ & \text{যদি } n = ২k+১, \text{ অযুগ্ম;} \\ ৮t_{\ell-১} + ৪\ell & \text{যদি } n = ২\ell, \text{ যুগ্ম.} \end{cases}$$

য'ত $t_k = ১ + ২ + \cdots + k$.

প্ৰমাণ.

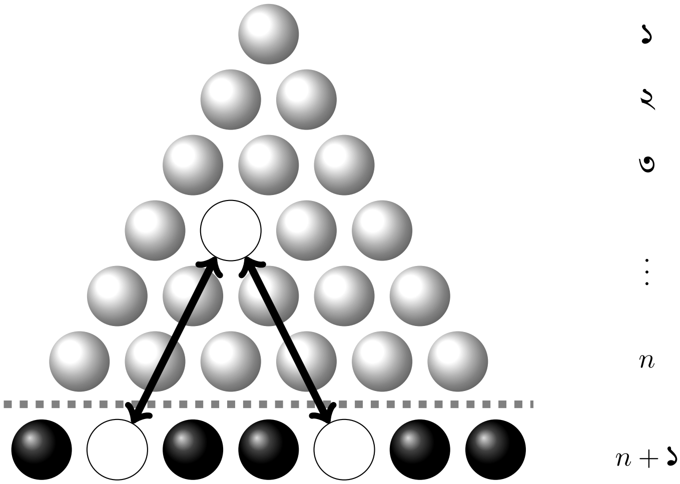


□

এই উপপাদ্যটোৰ এটা অনুসিদ্ধান্ত হিচাপে আমি দেখোঁ যে $(২k+১)^২ = ৮t_k + ১$, গতিকে $৪k^২ + ৪k = ৮t_k$. ই সকলো k ৰ বাবে আমি বিচৰা ফলটো দিয়ে $t_k = \dfrac{৪k^২ + ৪k}{৮} = \dfrac{k^২ + k}{২}$. (যুগ্মৰ বৈশিষ্ট্যটো ব্যৱহাৰ কৰিও ফলটো পাব পাৰি।)

২৭) এটা চিত্ৰীয় একৈকী-আচ্ছাদন:

তলৰ চিত্ৰটোৰে $১ + ২ + ৩ + \cdots + n$ যোগফলটোৰ সৈতে $\{১, ২, ৩, \ldots, n+১\}$ সংহতিটোৰ ২-উপসংহতিসমূহৰ সংগ্ৰহটোৰ এটা একৈকী-আচ্ছাদিত সম্পৰ্ক দেখুৱায়। এই নক্সাটো মূলতঃ ৭ নং প্ৰমাণত দিয়া একৈকী-আচ্ছাদিত সম্পৰ্কটোৰ ব্যাখ্যা কৰা চিত্ৰীয় প্ৰমাণ।



সেয়েহে, $১+২+৩+\cdots+n = \binom{n+১}{২}$.

২৮) ২ × ২ মৌলকক্ষৰ জৰিয়তে:

তলৰ প্ৰমাণটো লাৰ্চনে [10] এটা প্ৰশ্ন ৰূপে আগবঢ়াইছিল। যিকোনো $n \in \mathbb{N}$ অৰ বাবে ধৰা হ'ল $M_n = \begin{bmatrix} ১+২+৩+\cdots+n & n \\ n+১ & ২ \end{bmatrix}$. এতিয়া দেখোঁ যে

$$(M_n \cdot E)^T = \left(\begin{bmatrix} ১+২+৩+\cdots+n-১ & n \\ n-১ & ২ \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} ১+২+৩+\cdots+n-১ & n-১ \\ n & ২ \end{bmatrix} = M_{n-১},$$

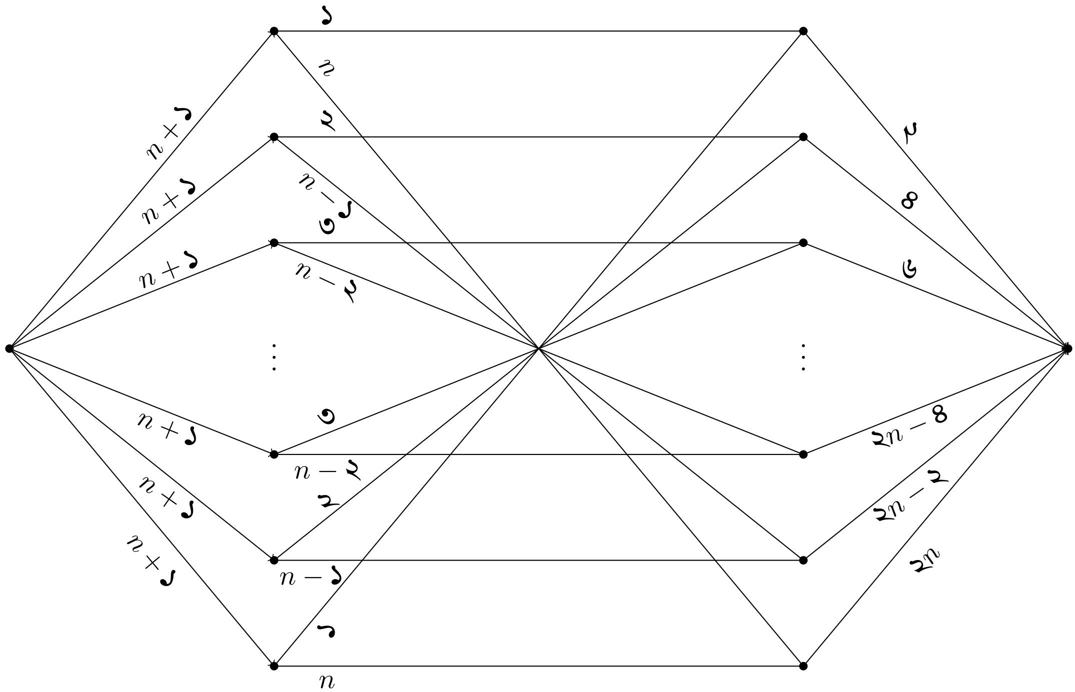
য'ত $E = \begin{bmatrix} ১ & ০ \\ -১ & ১ \end{bmatrix}$. মন কৰা যে $\det(E) = ১$, গতিকে সকলো n অৰ বাবে $\det(M_{n-১}) = \det(M_n)$. আকৌ, আমি দেখোঁ যে $M_১ = \begin{bmatrix} ১ & ১ \\ ২ & ২ \end{bmatrix}$, যাৰ নিৰ্ণায়ক (determinant) ০. সেয়েহে,

$$(১+২+৩+\cdots+n) \cdot ২ - n \cdot (n+১) = \det(M_n) = \det(M_১) = ০,$$

আৰু ইয়াৰ পৰা ফলাফলটো পোৱা যায়।

২৯) জল প্ৰবাহৰ চিত্ৰৰ জৰিয়তে:

এই প্ৰমাণটো [10] অৰ পৰা পোৱা গৈছে। তলৰ চিত্ৰই এটা উৎস S অৰ পৰা এটা জলধাৰাৰে অন্তবিন্দু T লৈ পানীৰ প্ৰবাহক দেখুৱাইছে। S এৰোঁতে আৰু T ত প্ৰৱেশ কৰোঁতে n টাকৈ জলপথ আছে। প্ৰতিটো পথৰ লেবেলে প্ৰবাহৰ হাৰক বুজাইছে। T আৰু S অত ক্ৰমে সোমোৱা আৰু ওলোৱাৰ হাৰ সমান হ'ব লাগিব (যিহেতু অকণো পানী নষ্ট নহয়)।



সেয়েহে, $n\cdot(n+১)=\sum_{i=১}^{n}২i=২(১+২+৩+\cdots+n).$

৩০) সৰল দূৰদৃষ্টি নিক্ষেপেৰে:

প্ৰথমে মন কৰিবা যে, সকলো $i\in\mathbb{N}$ অৰ বাবে আমি পাওঁ $i=\frac{i^২}{২}+\frac{i}{২}-\frac{i^২}{২}+\frac{i}{২}=\frac{i(i+১)}{২}-\frac{i(i-১)}{২}.$ সেয়েহে আমি পাওঁ,

$$\begin{aligned}\sum_{i=১}^{n} i &= \sum_{i=১}^{n}\left(\frac{i(i+১)}{২}-\frac{i(i-১)}{২}\right)\\ &= \sum_{i=১}^{n}\frac{i(i+১)}{২}-\sum_{i=১}^{n}\frac{i(i-১)}{২}\\ &= \sum_{i=১}^{n}\frac{i(i+১)}{২}-\sum_{i=০}^{n-১}\frac{(i+১)i}{২}\\ &= \frac{n(n+১)}{২}+\sum_{i=১}^{n-১}\frac{i(i+১)}{২}-\sum_{i=১}^{n-১}\frac{(i+১)i}{২}=\frac{n(n+১)}{২}.\end{aligned}$$

টোকা ১৪. মন কৰিবলগীয়া যে, ই মূলতঃ ১০ নং প্ৰমাণৰ দৰে একেই; মাথোঁ ক্ৰমিক অযুগ্ম সংখ্যাসমূহৰ যোগফল বৰ্গ হোৱা কথাটো অৱলম্বন নকৰাকৈ।

৩১) পিকৰ উপপাদ্যৰ জৰিয়তে:

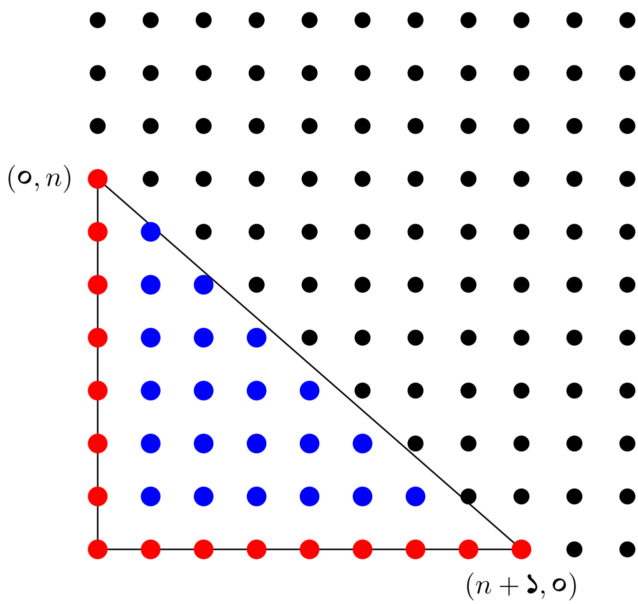
এই প্ৰমাণটো [10] অত অনুশীলন হিচাপে দিয়া হৈছিল। আমি প্ৰথমে পিকৰ উপপাদ্যটো মনত পেলাওঁ।

উপপাদ্য ১৫ (পিক). ধৰা P এটা জালিকা বহুভুজ (lattice polygon) (ই হৈছে অখণ্ড জালিকা-বিন্দুত শীৰ্ষবিন্দু লৈ একোটা বহুভুজ)। P ৰ কালি A, তলত দিয়া দৰে পোৱা যায়,

$$A = I + \frac{B}{২} - ১,$$

য'ত I হৈছে P অন্তৰ্ভাগত থকা জালিকা-বিন্দুৰ সংখ্যা আৰু B হৈছে P ৰ সীমাত থকা জালিকা-বিন্দুৰ সংখ্যা।

উপপাদ্যটো প্ৰয়োগ কৰিবলৈ আমি, যিকোনো n অৰ বাবে চিত্ৰত দেখুওৱা দৰে $(০, ০)$, $(০, n)$, আৰু $(n+১, ০)$ শীৰ্ষবিন্দু যুক্ত ত্ৰিভুজটো লওঁ।



ইয়াত $১+২+৩+\cdots+(n-১)$ টা অন্তৰ্বৰ্তী বিন্দু (নীলা) আছে। আৰু $(n+১)$ টা থিয় সীমাৰ বিন্দু, $(n+২)$ টা অনুভূমিক সীমাৰ বিন্দুৰে মুঠতে $(n + ১) + (n + ২) - ১ = ২n + ২$ টা সীমা বিন্দু (ৰঙা) আছে। তাৰোপৰি, ত্ৰিভুজটোৰ কালি $\dfrac{n(n + ১)}{২}$. গতিকে, পিকৰ উপপাদ্যৰ দ্বাৰা আমি প্ৰয়োজনীয় ফলটো পাওঁ যে

$$\frac{n(n + ১)}{২} = ১ + ২ + ৩ + \cdots + (n - ১) + \frac{১}{২}(২n + ২) - ১ = ১ + ২ + ৩ + \cdots + (n - ১) + n.$$

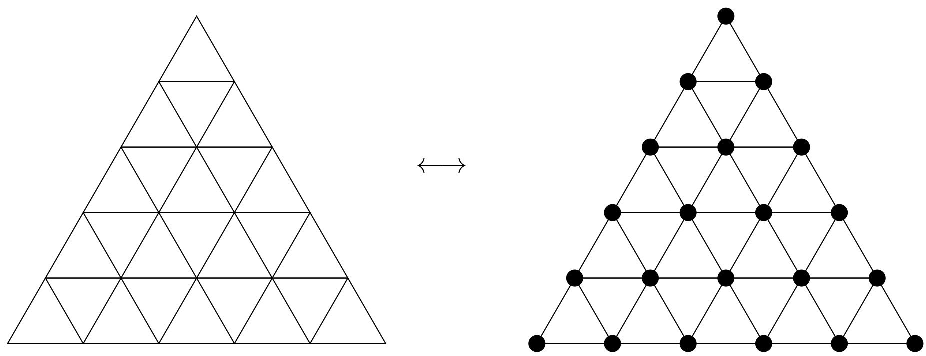
৩২) অয়লাৰৰ উপপাদ্যৰ জৰিয়তে:

এই প্ৰমাণটোৱো [10] অত অনুশীলন হিচাপে দিয়া হৈছিল। সমতলীয় লেখৰ (কোনো দুডাল বাহুৱেই পৰস্পৰ কটাকটি নকৰাকৈ সমতলত অংকন কৰিব পৰা লেখ) বাবে উত্থাপন কৰা অয়লাৰৰ বহুফলক সূত্ৰটো আমি প্ৰথমে মনত পেলাই লওঁ।

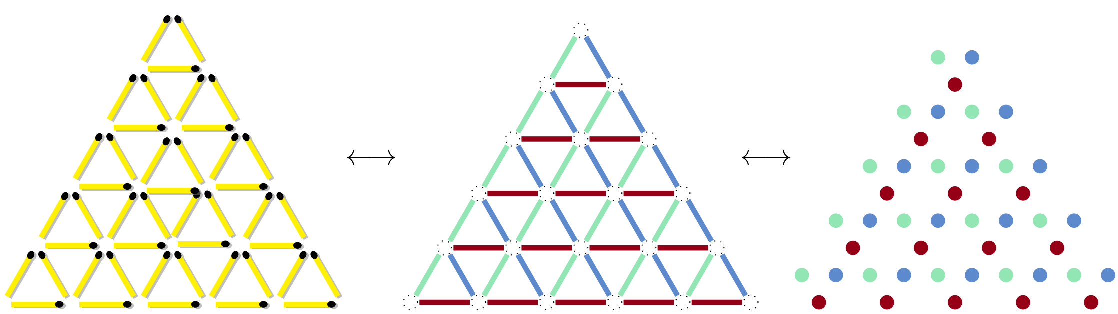
উপপাদ্য ১৬ (অয়লাৰ). ধৰা G এটা সসীম সমতলীয় লেখ, যাৰ v টা শীৰ্ষবিন্দু, e ডাল বাহু আছে আৰু সিহঁতে সমতলখনক f খন পৃষ্ঠলৈ ভাগ কৰে (বাহুসমূহে আগুৰি থকা অংশটো আৰু বহিৰ্ভাগৰ অসীমলৈকে জুৰি থকা অংশটো ধৰি)। তেতিয়া,

$$v - e + f = ২.$$

এতিয়া, পুনৰ মনত পেলোৱা যে যিকোনো k ৰ বাবে আমি ধৰিছিলোঁ $t_k = ১ + ২ + ৩ + \cdots + k$.



চিত্ৰ - ১০: পূৰ্ণবৰ্গ সংখ্যাৰ এটা ত্ৰিভুজীয় প্ৰতিৰূপক (ইয়াত $৫^২ = ২৫$ টা ক্ষুদ্ৰ ত্ৰিভুজ আছে) লেখ G_n লৈ ৰূপান্তৰ (যেতিয়া নেকি $n = ৫$)।



চিত্ৰ - ১১: G_n অত $3t_n$ টা বাহু থকাৰ এটা চিত্ৰীয় প্ৰমাণ ($৩t_n$ এ জুইশলা কাঠিৰ সংখ্যা বুজাইছে) [4].

পূৰ্ণবৰ্গ সংখ্যাসমূহক অযুগ্ম সংখ্যক ত্ৰিভুজৰ শাৰীৰে এটা ত্ৰিভুজীয় সজ্জাত প্ৰকাশ কৰাৰ এটা ধ্ৰুপদী চিত্ৰীয় ৰূপ চিত্ৰ ১০ অৰ বাওঁপিনে দেখুওৱা হৈছে ([1] চোৱা)। তাৰ পাছত, চিত্ৰ ১০ অৰ সোঁপিনে যিকোনো n অৰ বাবে অনুৰূপ G_n টো দেখুওৱা হৈছে। স্পষ্টভাবে, G_n লেখটো হৈছে $t_{n+১}$ শীৰ্ষবিন্দু যুক্ত এটা সমতলীয় লেখ। এই লেখটো পূৰ্ণবৰ্গ সংখ্যাক প্ৰকাশ কৰা এটা প্ৰতিৰূপ হিচাপে ই বুজায় যে ই সমতলক $n^২ + ১$ খন পৃষ্ঠত ভাগ কৰে। G_n অৰ বাহুসমূহৰ সংহতিয়ে এবিধ বিখ্যাত সংখ্যাৰ থূপক বুজাইছে যাক জুইশলা কাঠি সংখ্যা বুলি জনা যায়। চিত্ৰ ১১ এ দেখুৱাইছে যে G_n লেখটোৰ বাবে জুইশলা কাঠি সংখ্যাসমূহ $৩t_n$ এ দিব, সেয়েহে G_n অৰ $৩t_n$ টা বাহু

আছে। গতিকে, G_n লেখত অলয়াৰৰ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি, য'ত $v = t_{n+১}$, $e = ৩t_n$ আৰু $f = n^২ + ১$, আমি পাওঁ,

$$t_{n+১} - ৩t_n + n^২ + ১ = ২.$$

আকৌ $t_{n+১} = ১+২+৩+\cdots+n+(n+১) = t_n+(n+১)$ হোৱা বাবে আমি পাওঁ $t_n+(n+১)-৩t_n+n^২+১ = ২$, সেয়েহে, $-২t_n + n^২ + n = ০$ বা $n^২ + n = ২t_n$. এতিয়া ২ ৰে হৰণ কৰি আমি ফলাফলটো পাম।

৩৩) ভিয়েটাৰ সূত্ৰৰ জৰিয়তে:

মৰেণো আৰু গাৰ্চিয়া-কাবালিয়েৰ'এ [13] ভিয়েটাৰ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি তলৰ প্ৰমাণটো দিছিল। ধৰা হ'ল, $p(x) = a_nx^n + a_{n-১}x^{n-১} + \cdots + a_১x + a_০$ এটা বহুপদ ৰাশি, য'ত $a_n \neq ০$. ধৰা $p(x)$ অৰ n টা মূল (জটিল সংখ্যা হ'ব পাৰে আৰু পৃথক পৃথক হোৱাৰো প্ৰয়োজন নাই) হ'ল $r_১, r_২, \ldots,$ আৰু r_n. তেতিয়া, $p(x)$ অৰ মূল আৰু সহগসমূহৰ সম্পৰ্কত ভিয়েটাৰ সূত্ৰসমূহৰ এটাৰ মতে,

$$-(r_১ + r_২ + \cdots + r_n) = \frac{a_{n-১}}{a_n}. \tag{৪}$$

এতিয়া, যিকোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n অৰ বাবে, $P_n(x)$ বহুপদ ৰাশিটো লোৱা হ'ল,

$$P_n(x) = \prod_{i=১}^{n}(x-i) = (x-১)(x-২)\cdots(x-n).$$

স্পষ্টভাবে, P_n অৰ মূলসমূহ হৈছে $r_i = i$ য'ত $১ \leq i \leq n$. তদুপৰি, মূলসমূহৰ মধ্যবিন্দু হৈছে $\frac{n+১}{২}$, আৰু যিহেতু মূলসমূহ মধ্যবিন্দু সাপেক্ষে প্ৰতিসম (symmetric), গতিকে আমি দেখোঁ যে

$$P_n\left(\frac{n+১}{২} + x\right) = (-১)^n P_n\left(\frac{n+১}{২} - x\right).$$

ইয়াৰ ভিত্তিত আমি Q_n বহুপদ ৰাশিটো লওঁ যে,

$$Q_n = P_n\left(\frac{n+১}{২} + x\right).$$

ওপৰৰ পৰা আমি পাওঁ যে, যেতিয়া n যুগ্ম তেতিয়া Q_n যুগ্ম; একেদৰে, যেতিয়া n অযুগ্ম তেতিয়া Q_n অযুগ্ম। গতিকে, প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতে, যেতিয়া $Q_n(x) = a_nx^n + a_{n-১}x^{n-১} + \cdots + a_১x + a_০$ য'ত $a_n \neq ০$, তেতিয়া আমি পাবই লাগিব যে $a_{n-১} = ০$ (নহ'লে বহুপদ ৰাশিটো যুগ্ম বা অযুগ্ম নহ'ব)। এতিয়া, যদি আমি ধৰোঁ যে s_i এ Q_n অৰ i তম মূল বুজাইছে, তেতিয়া $\dfrac{n+১}{২} + s_i = r_i = i$ যিটো P_n অৰ অনুৰূপ মূল। Q_n অত ভিয়েটাৰ সূত্ৰ (সমীকৰণ (৪)) প্ৰয়োগ কৰি আমি পাওঁ যে

$$০ = \frac{০}{a_n} = -(s_১ + s_২ + \cdots + s_n).$$

এইটো প্ৰয়োগ কৰি আমি প্ৰয়োজনীয় তলৰ ফলাফলটো নিৰ্ণয় কৰিব পাৰোঁ,

$$(১+২+৩+\cdots+n)=\sum_{i=১}^{n} r_i=\sum_{i=১}^{n}\left(\frac{n+১}{২}+s_i\right)=n\cdot\frac{n+১}{২}+\sum_{i=১}^{n} s_i=\frac{n(n+১)}{২}+০.$$

৩৪) ক'চিৰ ফলনীয় সমীকৰণ ব্যৱহাৰ কৰি:

ক'চিয়ে প্ৰমাণ কৰিছিল যে, কোনো এটা ফলন $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ য'ত সকলো $x,y\in\mathbb{Q}$ ৰ বাবে $f(x+y)=f(x)+f(y)$ হয়, তেন্তে সকলো $r\in\mathbb{Q}$ ৰ বাবে $f(r)=f(১)r$.

ধৰা হ'ল, $S(n)=১+২+\ldots+n$. তেতিয়া,

$$\begin{aligned}S(m+n)&=১+২+\ldots+m+(m+১)+(m+২)+\ldots+(m+n)\\&=S(m)+S(n)+mn.\end{aligned}$$

ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ বাবে সংজ্ঞায়িত কৰা এই ফলনটো লোৱা হওক, $f(n)=S(n)-\frac{১}{২}n^২$. তেতিয়া,

$$\begin{aligned}f(m+n)&=S(m+n)-\frac{১}{২}(m+n)^২\\&=S(m)+S(n)+mn-\frac{m^২}{২}-\frac{n^২}{২}-mn\\&=f(m)+f(n).\end{aligned}$$

গতিকে, $f(n)$ টো ক'চিৰ ধৰণৰ। সেয়েহে, $f(n)=f(১)n$. গতিকে,

$$S(n)-\frac{n^২}{২}=f(n)=f(১)n=\frac{n}{২}.$$

ইয়াৰ পৰা পোৱা যায় যে $S(n)=\dfrac{n(n+১)}{২}$.

টোকা ১৭. এই প্ৰমাণটো দ্বিতীয় সহ-লেখকক হ'চে লুইচ চেৰেচেদাই দিছিল। এই প্ৰমাণটো আৰু উচ্চ ঘাতৰ বাবে সাধাৰণীকৰণসমূহ [15] অত সন্নিবিষ্ট হৈছে।

৩৫) ষ্ট'ল্জ-চিজাৰো উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি:

কাঙে [7] কৰা তলৰ প্ৰমাণটো আমাক হ'চে লুইচ চেৰেচেদাই প্ৰদান কৰিছিল।

উপপাদ্য ১৮ (ষ্ট'ল্জ-চিজাৰো উপপাদ্য)**.** ধৰা হ'ল, $\{a_n\}$ আৰু $\{b_n\}$ বাস্তৱ সংখ্যাৰ দুটা অনুক্ৰম। যদি b_n ধনাত্মক, প্ৰখৰভাৱে ক্ৰমবৰ্ধমান, অনাবদ্ধ (unbounded), আৰু

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-১}}{b_n-b_{n-১}}=\ell,$$

তেতিয়া,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\ell.$$

এতিয়া এই অনুক্ৰম দুটা লোৱা হওক: $a_n = ১ + ২ + \ldots + n$, আৰু $b_n = n^২$. মন কৰা যে

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-১}}{b_n - b_{n-১}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{২n - ১} = \frac{১}{২}.$$

গতিকে, ষ্ট'ল্‌জ-চিজাৰো উপপাদ্য মতে,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{১ + ২ + \ldots + n}{n^২} = \frac{১}{২}.$$

এতিয়া, এইটো অনুক্ৰম লোৱা হওক: $s_n = a_n - \frac{১}{২}n^2$. তেতিয়া,

$$s_n - s_{n-১} = n - \frac{n^২}{২} + \frac{(n-১)^২}{২} = n + \frac{-২n + ১}{২} = \frac{১}{২}.$$

গতিকে,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n - s_{n-১}}{n - (n-১)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{১}{২}}{১} = \frac{১}{২}.$$

ষ্ট'ল্‌জ-চিজাৰো উপপাদ্য মতে,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \frac{১}{২}.$$

এতিয়া ধৰা হ'ল, $r_n = a_n - \frac{n^২}{২} - \frac{n}{২}$, তেতিয়া,

$$r_n - r_{n-১} = \frac{১}{২} - \frac{n}{২} + \frac{n-১}{২} = ০.$$

সেয়হে, কোনো ক্ৰমবৰ্ধমান অনুক্ৰম b_n অৰ বাবে, যিটো অসীমলৈ যায়, আমি পাওঁ যে

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n - r_{n-১}}{b_n - b_{n-১}} = \lim_{n\to\infty} \frac{০}{b_n - b_{n-১}} = ০.$$

ইয়াৰ পৰা পোৱা যায় যে,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{b_n} = ০.$$

ইয়াৰ অৰ্থ হৈছে r_n টো এটা ধ্ৰুৱকেৰে পৰিবদ্ধ (bounded)। ই বুজায় যে, কোনো ধ্ৰুৱক C ৰ বাবে $\left|a_n - \frac{n^২}{২} - \frac{n}{২}\right| \leq C$. তদুপৰি, যিহেতু $r_n - r_{n-১} = ০$, গতিকে অনুক্ৰম a_n আৰু অনুক্ৰম $c_n = \frac{n^২}{২} + \frac{n}{২}$ দুয়োটাই একেটা পৌনঃপুনিক সম্পৰ্ক মানি চলে, যথা $a_n = n + a_{n-১}$ আৰু $c_n = n + c_{n-১}$. যিহেতু $a_০ = c_০ = ০$,

গতিকে সিহঁত একেটাই অনুক্ৰম হ'ব লাগিব। সেয়েহে, $a_n = \frac{n^২}{২} + \frac{n}{২}$.

টোকা ১৯. [7] অত কৰা দৰে এই পদ্ধতিটো উচ্চ মাত্ৰাৰ বাবে সাধাৰণীকৰণ কৰিব পাৰি।

তথ্যসূত্ৰ

[১] Claudi Alsina and Roger B. Nelsen, *Icons of mathematics*, The Dolciani Mathematical Expositions, vol. 45, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2011, An exploration of twenty key images. MR 2816682

[২] Yajun An and Tom Edgar, *Proof without words: Abel's transformation*, Math. Mag. **91** (2018), no. 4, 286–287. MR 3863781

[৩] Joe DeMaio and Joey Tyson, *Proof without words: A graph theoretic summation of the first n integers*, The College Mathematics Journal **38** (2007), no. 4, 296.

[8] Tom Edgar, *Proof without words: matchstick triangles*, College Math. J. **47** (2016), no. 3, 207. MR 3539871

[৫] ______, *Proof without words: a recursion for triangular numbers and more*, Math. Mag. **90** (2017), no. 2, 124–125. MR 3626285

[৬] Jaime Gaspar, *Proof without words: using trapezoids to compute triangular numbers*, Math. Mag. **91** (2018), no. 3, 206–207. MR 3808780

[৭] Sydney H. Kung, *Sums of integer powers via stolz-cesàro theorem*, The College Mathematics Journal **40** (2009), no. 1, 42–44.

[৮] Edwin G. Landauer, *Proof without Words: Square of an Even Positive Integer*, Math. Mag. **58** (1985), no. 4, 236. MR 1572584

[৯] ______, *Proof without Words: Square of an Odd Positive Integer*, Math. Mag. **58** (1985), no. 4, 203. MR 1572581

[১০] Loren C. Larson, *A discrete look at 1 + 2 +...+ n*, The College Mathematics Journal **16** (1985), no. 5, 369–382.

[১১] J. Barry Love, *Proof without Words: Cubes and Squares*, Math. Mag. **50** (1977), no. 2, 74. MR 1572199

[১২] František Marko and Semyon Litvinov, *Geometry of Figurate Numbers and Sums of Powers of Consecutive Natural Numbers*, Amer. Math. Monthly **127** (2020), no. 1, 4–22. MR 4043982

[১৩] Samuel G. Moreno and Esther M. García-Caballero, *Sums of integers*, The Mathematical Gazette **103** (2019), no. 556, 137–138.

[১8] B. Pascal, *Sommation des puissances numériques*, Oeuvres Complètes, vol. III, J. Mesnard, ed. (1964), 341–367.

[১৫] Prasanna K. Sahoo and Palaniappan Kannappan, *Introduction to functional equations*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2011. MR 2757437

[১৬] Georg Schrage, *Proof without Words*, Math. Mag. **65** (1992), no. 3, 185. MR 1572902

[১৭] David Treeby, *A moment's thought: centers of mass and combinatorial identities*, Math. Mag. **90** (2017), no. 1, 19–25. MR 3608696

[১৮] Enrique Treviño, *A short proof of a sum of powers formula*, Amer. Math. Monthly **125** (2018), no. 7, 659. MR 3836430

[১৯] ______, *Probabilistic proof that $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$*, Amer. Math. Monthly **126** (2019), no. 9, 840. MR 4022763